目　录

序言
编者的话

第一章　基本概念

第一节　几个简单的实例 …………2
　　习题 1·1 ……………………8
第二节　一些常用的名词 …………9
　　习题 1·2 ……………………13
第一章小结 ……………………14

第二章　初等积分法

第一节　变量分离的方程 ………16
　　习题 2·1 ……………………23
第二节　一阶线性微分方程式 …24
　　习题 2·2 ……………………29
第三节　初等变换 ………………31
　　习题 2·3 ……………………38
第四节　恰当方程 ………………39
　　习题 2·4 ……………………45
第五节　积分因子 ………………45
　　习题 2·5 ……………………49
第六节*　几个杂例 ……………50
　　习题 2·6 ……………………57
第二章小结 ……………………57

第三章　存在性与唯一性定理

第一节　微分方程的几何解释 …58
　　习题 3·1 ……………………64
第二节　比卡逐次逼近法 ………64
第三节　比卡存在定理 …………68
　　习题 3·3 ……………………77
第四节　解对参数和初值的依赖关系 ……………………78
　　习题 3·4* ……………………85
第三章小结 ……………………85

第四章　二阶微分方程式

第一节　降阶法 …………………87
　　习题 4·1 ……………………95

第二节　微分方程的线性化 ……96
习题 4·2……………………………99
第三节　齐次线性微分方程式…100
习题 4·3 ……………………108
第四节　常系数线性齐次微分方程式……………………109
习题 4·4 ……………………114
第五节　非齐次的线性微分方程式……………………115
习题4·5 ……………………124
第四章小结 …………………125

第五章　二阶线性微分方程的级数解法

第一节　幂级数复习 ……………127
习题 5·1 ……………………129
第二节　幂级数解法 ……………130
习题 5·2 ……………………137
第三节　勒让德多项式 …………138
习题 5·3 ……………………143
第四节　广义幂级数解法 ………144
习题 5·4 ……………………154
第五节　贝塞耳函数 ……………155
习题 5·5 ……………………164
第五章小结 …………………165

第六章　拉普拉斯变换

第一节　拉普拉斯变换的定义 …168
习题 6·1 ……………………177
第二节　求解初值问题 …………178
习题 6·2 ……………………183
第三节　含间断强迫函数的微分方程 ……………………183
习题 6·3 ……………………190
第四节　狄拉克函数及其应用 …191
习题 6·4 ……………………195
第五节　卷积 …………………196
第六章小结 …………………201

第七章　边值问题

第一节　比较定理及其推论 ……203
习题 7·1 ……………………209
第二节　边值问题的提法和特征值 ……………………209
习题 7·2 ……………………216
第三节　特征函数系的正交性 …217
习题 7·3 ……………………224
第四节　一个非线性边值问题的特例 ……………………224
第七章小结 …………………228

第八章　一阶线性微分方程组

第一节　微分方程组 ……………230
习题 8·1 ……………………238

第二节　消去法 ……………………238
　习题 8·2 ……………………242
第三节　齐次线性微分方程组 …243
　习题 8·3 ……………………251
第四节　常系数齐次线性微分方程组 ……………………252
　习题 8·4 ……………………263
第五节　非齐次线性微分方程组 ……………………264
　习题 8·5 ……………………269
第八章小结 ……………………270

第九章　第一积分与一阶偏微分方程式

第一节　一些例题 ……………………271
　习题 9·1 ……………………277
第二节　第一积分的定义及其充要条件 ……………………277
　习题 9·2* ……………………283
第三节　第一积分的个数 ………284
第四节　一阶线性齐次偏微分方程式 ……………………286
　习题 9·4 ……………………290
第五节　一阶拟线性偏微分方程式 ……………………291
　习题 9·5 ……………………295
第六节　特征线方法 ……………296
　习题 9·6 ……………………301
第九章小结 ……………………301

习 题 答 案

参 考 文 献

第一章

基本概念

在初等数学中，我们已经学过一些代数方程(如 n 元 n 个一次联立方程)，并且用它们解决了一些有趣的应用问题，使我们初步体会到方程论(主要是设未知量、列方程和求解方程的方法)对于解决实际问题的重要性.

在解析几何与微积分中，我们又碰到一类不同的方程——方程的个数少于未知量的个数，也就是通常所说的函数方程. 例如：

1) $$x^2+y^2=1$$

(设 x 是自变量，则 $y=y(x)$ 是未知函数)；

2) $$x+y+z=0,\ x^2+y^2+z^2=1$$

(设 z 是自变量，则 $x=x(z)$ 和 $y=y(z)$ 是两个未知函数)；

3) $$\sqrt{x^2+y^2}=\exp\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right]$$

(设 x 是自变量，则 $y=y(x)$ 是未知函数)

等等.

这类函数方程与开头所说的代数方程相比，在概念上进了一步——确定自变量与因变量之间的函数关系. 利用这类方程，可以解决一类新的问题，例如某些轨迹问题和极值问题等.

本书将要讲述的方程与刚才说的那种函数方程又不一样，它们除了自变量和未知函数外，还包含了未知函数的导数

(即微商). 例如:

1) $$x+y+\frac{dy}{dx}=0$$

$\left(x\right.$ 是自变量, $y=y(x)$ 是未知函数, $\frac{dy}{dx}$ 是未知函数对 x 的导数$\left.\right)$;

2) $$r^2\frac{d^2u}{dr^2}+r\frac{du}{dr}+(r^2-1)u=0$$

(r 是自变量, $u=u(r)$ 是未知函数, 等等);

3) $$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$$

(x 和 y 是自变量, $\phi=\phi(x, y)$ 是未知函数, 等等).

我们称这类含有未知函数的导数(或微分)的方程式为*微分方程式*. 今后我们将会看到, 许多描述物理现象的自然定律(例如牛顿第二运动定律)的数学表达形式往往就是微分方程式. 因此, 微分方程是解决许多力学和物理问题的重要工具. 例如, 它在自动化控制技术和人造卫星轨道计算中有广泛的应用, 而且对于学习数理化的许多基础学科也是很必要的.

微分方程理论的发展大都有明显的实际背景, 所以我们将先介绍几个具体的物理模型, 并且从中列出几个简单的微分方程。

第一节 几个简单的实例

在这一节中列举几个简单的实际例子, 说明怎样从实际问题列成微分方程的问题. 例子虽然简单, 但是从中能够简明地诱导出微分方程的一些基本概念, 成为进一步探讨其他较复杂问题的借鉴. 掌握好这些例子, 会有助于增进我们分

析问题的能力.

【例题 1】 自由落体. 所谓自由落体,指的是只计重力对落体的作用,而忽略空气的阻力和其他外力的影响,参看图 1-1. 设落体 B 作垂直于地面的运动,它的位置坐标 $y=y(t)$ 随时间 t 而变化. 它究竟如何变化呢? 这就是要解决的一个实际问题.

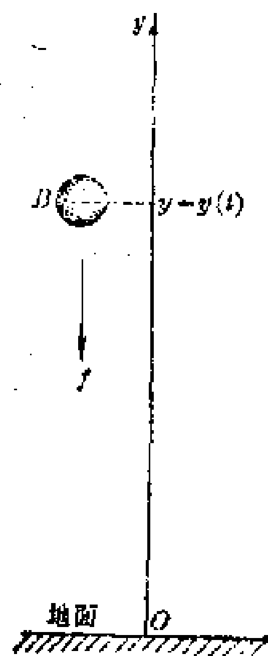


图 1-1

因为 $y=y(t)$ 代表落体 B 的位置坐标,所以它对 t 的一阶导数 $y'=y'(t)$ 代表落体 B 的瞬时速度 $v=v(t)$; 而二阶导数 $y''=y''(t)$ 则代表瞬时加速度 $a=a(t)$. 假定 B 的质量为 m, 则它的惯性力等于 $ma(=my'')$. 我们注意到图 1-1 的坐标轴 y 向上为正,因此重力 w 向下为负,即 $w=-mg$, 这里 g 是重力加速度(通常取 $g=9.8$ 米/秒^2). 因为假设 B 是自由落体, 即假设 B 所受的外力 f 只有重力 w, 即 $f=-mg$, 所以由牛顿第二运动定律($ma=f$)推出

$$my''=-mg.$$

两边消去常数 m, 得到

$$y''=-g. \tag{1}$$

这是一个简单的微分方程式. 这就把上述的自由落体问题化为从微分方程式(1)求解未知函数 $y=y(t)$ 的数学问题了.

这后一问题比较简单, 很容易求得它的解答. 由微分方程(1)对 t 进行一次积分,则有

$$y'=-gt+C_1, \tag{2}$$

其中 C_1 是一个任意常数; 再由(2)对 t 积分一次,得到

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2, \tag{3}$$

其中 C_2 是另一个任意常数. 公式(3)就是我们求得的解答. 但是, 在解答(3)中包含了两个任意的常数 C_1 和 C_2, 因此还不能由此最终确定自由落体 B 的运动状态. 究竟原因何在呢? 原来自由落体 B 的运动规律 $y=y(t)$ 应该与它的初始状态(即在初始时刻 $t=0$ 时的初位置 $y(0)=H$ 和初速度 $y'(0)=v$)有关. 这就是说, 在求解自由落体 B 的运动方程(1)时, 还须同时考虑初始条件

$$y(0)=H, \quad y'(0)=v, \tag{4}$$

这里 H 表示落体 B 的初始高度; v 表示初始速度, 通常我们认为它们是已知的常数.

在(3)和(2)中, 令 $t=0$, 则得

$$y(0)=C_2, \quad y'(0)=C_1.$$

为了保证初始条件(4)成立, 应该取 $C_2=H$ 和 $C_1=v$. 这样一来, 由运动方程(1)和初始条件(4)就完全确定了自由落体 B 的运动规律为

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+vt+H. \tag{5}$$

为了加深对初始条件(4)的理解, 我们顺便再解说几句: 初位置 H 和初速度 v 完全由落体 B 的初始状态而定. 例如, 设 B 从距地面 20 米高的塔顶由静止状态落下, 则 $H=20$ (米)和 $v=0$ (米/秒), 从而初始条件(4)为: $y(0)=20$(米), $y'(0)=0$(米/秒). 因此, 由(5)得到 $y=-\frac{1}{2}gt^2+20$ (米). 又若落体 B 从距地面 20 米高的塔顶上以每秒 5 米的初速度垂直向下投掷, 则 $H=20$(米)和 $v=-5$(米/秒), 此时初始条件(4)变为: $y(0)=20$(米), $y'(0)=-5$(米/秒). 因而得到

$y=-\frac{1}{2}gt^2-5t+20$（米）. 显然，上面所得到的落体的两种运动规律是不同的. 这就清楚地说明运动方程的解与运动的初始条件有关.

在微积分发现以前，十七世纪初，意大利物理学家伽利略已经用实验观察和总结出自由落体的运动规律. 现在，我们用牛顿的运动定律列出并求解一个微分方程，再用初始条件，确定了自由落体一般运动规律的数学公式(5)，它在理论上可以很满意地解释伽利略的实验，且便于计算(参看后面的习题).

【例题 2】 镭的衰变：由于放射性的原因，镭的质量 $R=R(t)$ 是随时间 t 的进行而减少的，即 $\frac{dR}{dt}\leqslant 0$. 在实际的应用中，镭的寿命(即 $R=R(t)$ 的变化规律)是我们关心的一个问题.

实验告诉我们，镭的衰变规律是：镭的衰变率 $\frac{dR}{dt}$ 和镭的质量 R 成正比，即

$$\frac{dR}{dt}=-aR, \tag{6}$$

其中 a 是比例常数. 按照惯例，我们规定 $a>0$. 由于方程(6)的左端 $\frac{dR}{dt}\leqslant 0$，而右端 $R\geqslant 0$ 及 $a>0$，所以在(6)式的右端添了一个负号.

方程(6)就是镭衰变定律的数学表达式，它是一个微分方程，但它并没有直接表明镭的质量是多少，也就是说 $R=R(t)$ 还是一个未知函数. 因此，问题是怎样由微分方程(6)求解镭的质量 $R=R(t)$？

另外，镭的质量 $R=R(t)$ 显然与初始时刻 $t=t_0$ 时的质量

M 有关(设常量 M 可由测量确定)，所以在由微分方程(6)求解 $R=R(t)$ 时，还应该附加初始条件

$$R(t_0)=M. \tag{7}$$

到此，我们对镭衰变问题建立了一个数学模型：由微分方程(6)求满足初始条件(7)的解 $R=R(t)$.

我们发现，对微分方程(6)不能象对微分方程(1)那样简单地直接对 t 积分求解了. 因为现在主要的任务是从实际例子建立数学模型，所以对(6)式求解的问题暂时放到后面第二章第一节中去解决.

下面根据与上述同样的原则处理另一个例子：

【例题3】 弹簧振动：设弹簧 S 固定在一顶板上，下端挂一质量为 m 的振子 B，使它静止如图1-2中的(a). 然后用垂直的初位移 x_0 和初速度 v_0，使振子 B 作上下振动 $x=x(t)$，如图1-2中的(b).

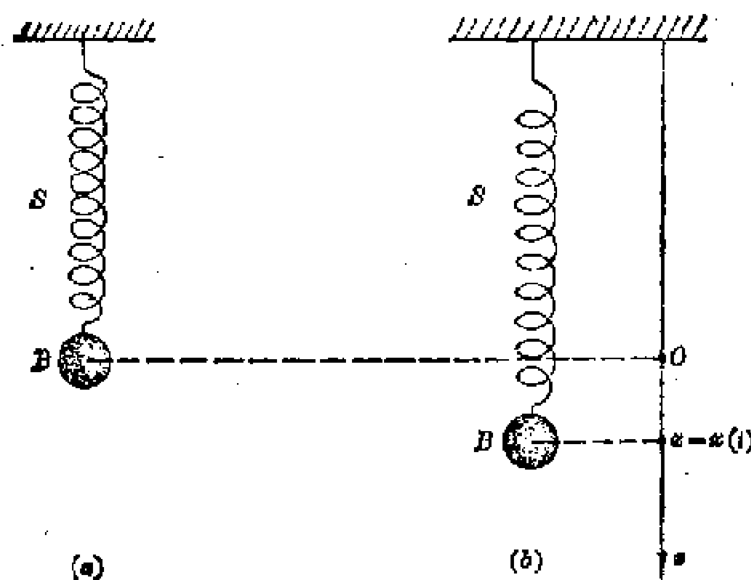


图 1-2

因为 $x=x(t)$ 表示振子 B 关于静止点 O (我们把它取为坐标轴 x 的原点) 的位移，所以它对 t 的一阶导数 $x'=x'(t)$

和二阶导数 $x''=x''(t)$ 分别代表振子 B 的速度和加速度. 因此, mx'' 表示惯性力.

根据牛顿的第二运动定律可知: 振子 B 的惯性力 $mx''=$ 振子 B 所受的外力 f. 现在要问: 这外力 f 是由哪些力构成的? 不难看到, 一个是弹簧 S 的恢复力 f_1; 另一个是空气的阻力 f_2, 即 $f=f_1+f_2$.

普通物理学里的虎克定律告诉我们: 弹簧的恢复力 f_1 与振子 B 的位移 x 成正比, 或者说

$$f_1=-kx, \tag{8}$$

式中比例常数 $k(>0)$ 叫作*弹性系数*. 根据上面所取的坐标系, 恢复力 f_1 的方向与位移 x 的方向相反, 所以(8)式的右边添一负号.

至于空气的阻力 f_2, 情况比较复杂. 但是当运动速度不太大时, 阻力 f_2 大致与速度 x' 成正比, 亦即

$$f_2=-rx', \tag{9}$$

式中比例常数 $r(>0)$ 叫作*阻尼系数*. (9)式右边的负号是由于阻力 f_2 的方向与振子 B 的速度 x' 的方向相反.

因此, 我们得到

$$f=-kx-rx'.$$

从而推出振子 B 的运动方程为

$$mx''=-kx-rx'. \tag{10}$$

这也是一个微分方程. 我们感兴趣的问题是: 怎样由微分方程(10)求解弹簧的振动规律 $x=x(t)$?

根据简单的物理直观, 我们知道振子 B 的运动规律 $x=x(t)$ 应该与它的初始状态(即初位移 $x(t_0)=x_0$ 和初速度 $x'(t_0)=v_0$)有关. 因此, 在求微分方程(10)的解 $x=x(t)$ 时, 还应该附加初始条件

$$x(t_0)=x_0, \quad x'(t_0)=v_0, \tag{11}$$

式中 t_0 代表确定的初始时刻，初位移 x_0 和初速度 v_0 都是已知的常数.

例如，设初始时刻取为 $t_0=0$，我们用手把振子 B 拉到 $x=4$(厘米)处，然后轻轻放手(即取初速为 0)，弹簧就开始上下振动. 这振动的初始条件为

$$x(0)=4(\text{厘米}), \quad x'(0)=0(\text{厘米/秒}),$$

如此等等.

因此，上述弹簧振动问题的数学模型可以归结为如下形式：由微分方程(10)求出满足初始条件(11)的解 $x=x(t)$.

习 题 1·1

1. 对于例题 1 中的自由落体，解释 $H=75$(米)，$v=\pm 8$(米/秒)的物理意义.
2. (同上)解释 $H=0$(米)和 $v=25$(米/秒)的物理意义；并求物体可能达到的最大高度和落地时刻.
3. 对于例题 3 中的弹簧振动，解释初始条件 $x(0)=-2$(厘米)，$x'(0)=0$(厘米/秒)和初始条件 $x(0)=0$(厘米)和 $x'(0)=-100$(厘米/秒)的物理意义.
4. 试问对于初始条件 $x(0)=0$，$x'(0)=0$，弹簧振子 B 将作怎样的运动?
5*. 在弹簧振动方程(10)中，为什么不出现重力的作用?
6*. 设弹性系数分别为 k_1 和 k_2 的两个弹簧在光滑的水平面上共同牵引质量为 m 的一个振子(参考图 1-3)，不计空气的阻力，试列出振子的运动方程和初始条件(注意：图中 O 点是振子的静止点).

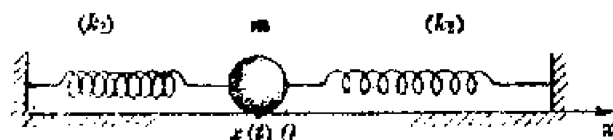


图 1-3

第二节 一些常用的名词

在上一节，我们从实际问题列出了几个简单的微分方程的例子. 为了今后更一般地介绍微分方程的理论和方法，我们在这一节将介绍一些常用的名词与基本概念.

定义1 凡是联系自变量 x 和这个自变量的未知函数 $y=y(x)$ 以及直到它的 n 阶导数在内的方程式

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0, \tag{1}$$

叫作常微分方程式. 其中导数实际出现的最高阶数 n 叫作常微分方程(1)的阶数.

例如，在上一节中列出的 $y''(t)=-g$ 就是一个常微分方程式，自变量是 t，未知函数是 $y=y(t)$，阶数 $n=2$; $\frac{dR}{dt}=-aR$ 也是一个常微分方程式，自变量是 t，未知函数是 $R=R(t)$，阶数 $n=1$; $mx''=-kx-rx'$ 也是一个常微分方程式，自变量是 t，未知函数是 $x=x(t)$，阶数 $n=2$.

又如，下面的方程式也是一些常微分方程式:

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0, \tag{2}$$

式中 n 是一个常数，x 是自变量，$y=y(x)$ 是未知函数，阶数为2;

$$\ddot{\theta}+a^2\sin\theta=0 \quad \left(\text{式中} \cdot \text{表示} \frac{d}{dt}\right), \tag{3}$$

这里 a 是一个常数，自变量是 t，未知函数是 $\theta=\theta(t)$，阶数为2;

$$\frac{d^4u}{ds^4}+u=0, \tag{4}$$

式中 s 是自变量，$u=u(s)$ 是未知函数，阶数为4.

在上述定义中，把微分方程式(1)冠以"常"字，指的是未知函数是单元函数；如果未知函数是多元函数，那么在相应的微分方程中就出现了偏导数，对于这样的方程式，很自然称它为偏微分方程式. 例如，下面两个方程式都是偏微分方程式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{5}$$

式中自变量为 x 和 y，未知函数为 $u=u(x, y)$，阶数为 2；

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=-f, \tag{6}$$

式中自变量为 x，y 和 z，未知函数为 $f=f(x, y, z)$，阶数为 1.

本书的主要内容是介绍常微分方程式，所以除了最后一章外，所说的微分方程式都是指常微分方程式.

在上一节中，针对某些实际例子，已经提到微分方程的求解问题. 在那里"求解"的实际含意是很清楚的：在自由落体的例子中，就是由方程 $y''(t)=-g$ 求出落体 B 的位置坐标 $y=y(t)$；在镭衰变的例子中，就是由方程 $\frac{dR}{dt}=-aR$ 求出镭的质量 $R=R(t)$；在弹簧振动的例子中，就是要从方程 $mx''=-kx-rx'$ 求出振子 B 的位置坐标 $x=x(t)$.

但是，对于一般的微分方程，首先应该明确：什么是"解"？然后才能讨论如何求"解"？

定义 2 设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 J 上连续，且有直到 n 阶的导数. 如果把 $y=\varphi(x)$ 及其相应的各阶导数代入微分方程式(1)，得到一个关于 x 的恒等式，即

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x))\equiv 0$$

对一切 $x\in J$ 都成立. 则称 $y=\varphi(x)$ 为微分方程(1)在区间 J 上的一个解.

例如，设微分方程式

$$y''+9y=0 \quad \left({}'\text{ 表示 } \frac{d}{dx}\right), \tag{7}$$

我们考虑 $y=\sin 3x$. 因为

$$y'=3\cos 3x, \quad y''=-9\sin 3x,$$

所以

$$y''+9y=-9\sin 3x+9\sin 3x\equiv 0$$

对一切 $x\in(-\infty, \infty)$ 都成立. 因此，$y=\sin 3x$ 是微分方程式(7)在区间 $-\infty<x<\infty$ 上的一个解. 类似地可以验证 $y=\cos 3x$ 也是方程(7)的一个解，而且

$$y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x \tag{8}$$

(其中 C_1 和 C_2 是两个任意的常数)都是方程(7)的解.

为了加深对解的概念的理解，请读者直接验证:

1) $R=100e^{-at}$ 是上一节镭衰变方程 $\frac{dR}{dt}=-aR$ 的一个解; $R=Ce^{-at}$ (C 是任意常数)也是解. 但 $R=e^{-2at}$ 不是解.

2) $y=\operatorname{tg} x$ 是微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=1+y^2 \tag{9}$$

在区间 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 上的一个解; $y=\operatorname{tg}(x-C)$ (C 是任意常数)是微分方程(9)在区间 $C-\frac{\pi}{2}<x<C+\frac{\pi}{2}$ 上的一个解. 但是，$y=\operatorname{tg} x+1$ 不是解.

我们在上面的验证中已经看到: 微分方程的解可以包含一个或几个任意的常数，而有的解不包含任意常数. 为了标明这个重要的区别，我们特作如下约定:

设 n 阶微分方程(1)的解 $y=\varphi(x;\ C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_n)$ 包含

了 n 个独立的任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ [注]，则称它为方程式(1)的通解；如果微分方程式(1)的解 $y=\varphi(x)$ 不包含任意常数，则称它为方程式(1)的特解。

例如，$y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$ 是微分方程式(7)的通解；而 $y=\cos 3x$ 和 $y=\sin 3x$ 都只是特解；$y=\operatorname{tg}(x-C)$ 是微分方程(9)的通解；而 $y=\operatorname{tg}(x-1)$ 只是一个特解。

显然，当任意常数一旦确定之后，通解也就变成了特解。例如，在微分方程(7)的通解(8)中，若令 $C_1=\sqrt{2}$，$C_2=-4$，则得到一个特解 $y=\sqrt{2}\cos 3x-4\sin 3x$。在上一节的自由落体的例子中，我们看到在那里通解(3)中的任意常数 C_1 和 C_2 可以通过初始条件(4)加以确定。同样，为了确定一般的 n 阶微分方程式(1)的通解 $y=\varphi(x;\ C_1, C_2, \cdots, C_n)$ 中的 n 个任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$，也应该附加相应的初始条件

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}, \qquad (10)$$

这里 x_0 是自变量 x 的某个特定的值，而 $y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}$ 是 n 个给定的常数。

求微分方程(1)的一个解，使得它满足预先给定的初始条件(10)。我们称这样的问题为微分方程的初值问题，有时简写成(1)+(10)，或

$$\begin{cases} F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0, \\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

例如，在上一节中，例题1相当于初值问题(1)+(4)；例题2相当于初值问题(6)+(7)；例题3相当于初值问题(10)+(11)。有时，我们也称初值问题为柯西(Cauchy)问题。

[注] 关于 n 个独立的任意常数的确切含意是：$\varphi, \varphi', \cdots, \varphi^{(n-1)}$ 关于 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的雅可比(Jacobi)行列式

$$\frac{D(\varphi, \varphi', \cdots, \varphi^{(n-1)})}{D(C_1, C_2, \cdots, C_n)}\neq 0.$$

习 题 1·2

1. 试填写下表：

编号	微 分 方 程	自变量	未知函数	常或偏	阶 数
1	$\frac{d^4S}{dr^4}+S=S^3$				
2	$\frac{d^2x}{dy^2}+xy=0$				
3	$y=xy'+\sqrt{1+(y')^2}$				
4	$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$				
5	$u\frac{\partial z}{\partial u}+v\frac{\partial z}{\partial v}=-z$				
6	$(x+y)dx+(x-y)dy=0$				

2. 验证下表中左列的函数分别满足右列的微分方程式(可能有例外)；并填上对应的初始条件：

编号	函 数	微 分 方 程	初 始 条 件
1	$y=e^{-x}+x-1$	$y'+y=x$	$y(0)=$
2	$y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$	$y''-9y=0$	$y(0)=$ $y'(0)=$
3	$y=e^{x^2}\left(1+\int_0^x e^{-t^2}dt\right)$	$y'-2xy=1$	$y(0)=$
4	$y=e^{\lambda x}$(λ 是实常数)	$y'''+y=0$	$y(0)=$ $y'(0)=$ $y''(0)=$
5	$y=\sin x$	$y''+\lambda y=0$	$y(\pi)=$ $y'(\pi)=$
6	$u=1+\cos(x+t)$	$u''_{tt}=u''_{xx}$	$u(0, x)=$ $u'_t(0, x)=$

第一章小结

1. 要求理解并掌握第一节中对三个实际例题的分析：怎样从物理定律到微分方程式；理解初始条件的实际含意.
2. 当我们碰到一个微分方程式时，首先应该明确：哪些是自变量，哪些是未知函数及其导数，这个微分方程是常的还是偏的，它的阶数是多少.
3. 对于给定的函数，要求能够验证它是否满足所考虑的微分方程式和初始条件.

第二章

初等积分法

微分方程的一个中心问题是"求解". 例如,在第一章中,曾经把一些实际问题转化为微分方程的求解问题. 对于自由落体所满足的微分方程,我们直接利用不定积分的方法找到了它的通解,从而揭示了自由落体的一般运动规律. 而对于镭衰变和弹簧振动所满足的微分方程,却未能求出它们的解,所以相应的实际问题也未能得到解决. 从这一点看,微分方程的求解问题是解决相应实际问题的一个关键.

但是,微分方程的求解问题通常并不是容易解决的. 我们在这里顺便讲一个历史上的小故事. 微积分的发现者之一,伟大的数学家莱布尼兹(Leibniz)在1686年曾经向当时的数学界提出求解一阶微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$$

的问题. 他说,对于这个方程,他不会求解. 从形式上看,这个方程是比较简单的. 因此,这个莱布尼兹问题成为历史上的一大挑战,曾经吸引了许多数学家的注意. 大约经过150年的探索,到1838年,刘维尔在理论上证明了上述莱布尼兹提出的微分方程是不可能用初等(函数)积分法求解的(即不可能用初等函数及其积分来表达它的解).

由此可见,我们不能期望用初等积分法解决一般微分方程式的求解问题. 但是,对于某些特殊类型的微分方程式(往往是很重要的),是可能用初等积分法求解的. 这是本章的基

本内容．类似于不定积分法在微积分学的作用，微分方程的初等积分法是本课程最重要的基本训练之一．为了保证完成这种基本训练，读者除了仔细验算有关的例题外，认真演算本书各节所列的习题是很必要的．

第一节　变量分离的方程

设一阶微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y),\tag{1}$$

其中 $f(x,\ y)$是给定的函数．我们要做的工作是求微分方程(1)的解 $y=y(x)$．可是一般不能用初等方法解出这个微分方程，例如上面所说的莱布尼兹方程(相当于 $f(x,y)=x^2+y^2$)．但是，当微分方程(1)的右端 $f(x,\ y)$取某几种特殊的类型时，就可能用初等积分法求解．

这一节首先讲一个重要的特殊情形：

$$f(x,\ y)=h(x)\cdot g(y).$$

此时微分方程(1)就是

$$\frac{dy}{dx}=h(x)\cdot g(y).\tag{2}$$

微分方程(2)称为变量分离的方程．

例如，

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y};\quad \frac{dy}{dx}=\sqrt[3]{y};\quad \frac{dy}{dx}=e^{x+y};$$

$$\frac{dy}{dt}=y\cdot\cos t;\quad \frac{dR}{dt}=-aR\quad (a>0\ \text{是常数}),$$

都是变量分离的方程，而莱布尼兹方程 $y'=x^2+y^2$ 则不是．

对于变量分离的方程(2)，可以用初等积分法求它的解．

为了由浅入深地掌握变量分离方程(2)的解法，我们特地分作两步讨论：

1) 假设 $g(y)$是常数(不妨设 $g(y)=1$).

此时微分方程式(2)变为

$$\frac{dy}{dx}=h(x). \tag{3}$$

为了可以对它进行积分运算，我们假定函数 $h(x)$ 在区间 $a<x<b$ 上是连续的．显然，求微分方程(3)的解，实际上是一个求 $h(x)$的原函数(不定积分)的问题．因此，可以直接对(3)取不定积分，就得到它的通解

$$y=\int_{x_0}^{x} h(x)dx+C, \tag{4}$$

其中 C 是一个任意的常数．在(4)中，并未注明积分上下限的变化范围，而默认 $x_0\in(a, b)$是固定的[注]，而 $x\in(a, b)$是自变量．今后将按类似的原则理解其他的积分．

为了确定通解(4)中的任意常数 C，须要附加初始条件

$$y(x_0)=y_0, \tag{5}$$

这里 y_0 是一个任意给定的初值．为了从通解(4)中找出满足初始条件(5)的那个解，在(4)中令 $x=x_0$，即得 $y(x_0)=C$．再由初始条件(5)，确定了 $C=y_0$．从而得到初值问题(3)+(5)的解为

$$y=\int_{x_0}^{x} h(x)dx+y_0. \tag{6}$$

2) 假设 $g(y)$不是常数．

此时微分方程(2)的右端与未知函数 y 有关，因此不能象

[注] 这里$\in$表示属于的意思．因此，$x_0\in(a, b)$表示 x_0 属于区间(a, b)，下同．

对(3)那样直接取不定积分得解. 我们须要设法克服这个困难.

类似于对 $h(x)$ 的假定, 设 $g(y)$ 是在区间 (a, β) 上的连续函数. 假定 $y=y(x)$ 是微分方程(2)的一个解, 即它满足

$$\frac{dy}{dx}=h(x)\cdot g(y), \tag{2}$$

且设 $g(y)\neq 0$, 那么可用分离变量法把方程式(2)写成

$$\frac{dy}{g(y)}=h(x)dx. \tag{7}$$

这样一来, 自变量 x 与未知函数 y 互相分离了. 因此可对方程式(7)取不定积分(注意 $y=y(x)$), 得

$$\int_{\beta}^{y}\frac{dy}{g(y)}=\int_{a}^{x}h(x)dx+C, \tag{8}$$

其中 a 和 β 分别是固定的积分下限, 而 C 是任意常数. 令

$$G(y)=\int_{\beta}^{y}\frac{dy}{g(y)}, \quad H(x)=\int_{a}^{x}h(x)dx,$$

则(8)就是

$$G(y)=H(x)+C. \tag{9}$$

总结上面的讨论, 我们得知微分方程(2)的解 $y=y(x)$(要求 $g(y)\neq 0$)满足隐函数方程(9), 即 $y=y(x)$ 是(9)的解.

反之, 设 $y=y(x)$ 是隐函数方程(9)的解, 亦即当 $y=y(x)$ 时, 等式(9), 从而等式(8)成立. 由(8)的两边对 x 求导数, 就推出(7)成立, 从而(2)成立. 这就证明了隐函数方程(9)的解 $y=y(x)$ 也是微分方程(2)的解.

因此, 公式(9)确定了微分方程(2)(包含一个任意常数 C)的隐式解. 为了区别于显式的通解 $y=\varphi(x; C)$, 我们称(9)为微分方程(2)的通积分.

在上述分离变量的过程中, 须要设 $g(y)\neq 0$. 但是, 若

$g(y)=0$ 有一个根为 $y=r$，则不难验证 $y=r$（作为 x 的函数）是微分方程(2)的一个特解.

在这里我们顺便作一点说明：今后，对于在求解过程中出现的一些积分，我们应该尽可能把它们演算到底，或者说，把它们用初等函数表达出来. 但是，当这些积分不能用初等函数表出时$\left(\text{例如，} G(y)=\int_0^y e^{-y^2}dy\right)$，我们也认为微分方程是得解了. 这是因为从微分方程的观点来看，留下来的是一个积分，而不是一个微分方程了.

最后，我们介绍一个常用的名词. 一阶微分方程式(1)的一个解在 xOy 平面上的几何图形是一条曲线，我们称这种曲线为微分方程(1)的**积分曲线**.

【例题 1】 求解微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{y} \quad (0\leqslant y<\infty), \tag{10}$$

并作它的积分曲线的图形.

利用分离变量法，得

$$\frac{dy}{\sqrt{y}}=dx \quad (\text{当 } y>0),$$

两边取不定积分，得到

$$\int\frac{dy}{\sqrt{y}}=\int dx+C.$$

即得通积分

$$2\sqrt{y}=x+C. \tag{11}$$

注意，因为此式左端 >0，所以右端 $x+C>0$，即 $x>-C$. 于是，从通积分(11)解出

$$y=\frac{1}{4}(x+C)^2 \quad (x>-C). \tag{12}$$

这就是微分方程(10)的通解．另一方面，当 $\sqrt{y}=0$，即 $y=0$ 时，得到一个特解

$$y=0 \quad (-\infty<x<\infty). \tag{13}$$

根据(12)和(13)，就可以作出微分方程(10)的积分曲线族的图形，如图 2-1 所示．我们由此清楚地看到，经过上半平面(不包括 x 轴)任意给定的一点 $P_0(x_0,\ y_0)$(初值点)，在局部的范围内，有并且只有一条积分曲线；而当初值点 P_0^* 在 x 轴上时，即使在局部的范围内，经过 P_0^* 点的积分曲线就不止一条．也就是说，微分方程(10)的满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解，当 $y_0>0$ 时，是局部唯一的；而当 $y_0=0$ 时，则是局部不唯一的．这种奇异的现象是否能够从理论上进行阐明呢？我们把这个有趣的问题推迟到下一章去解决．

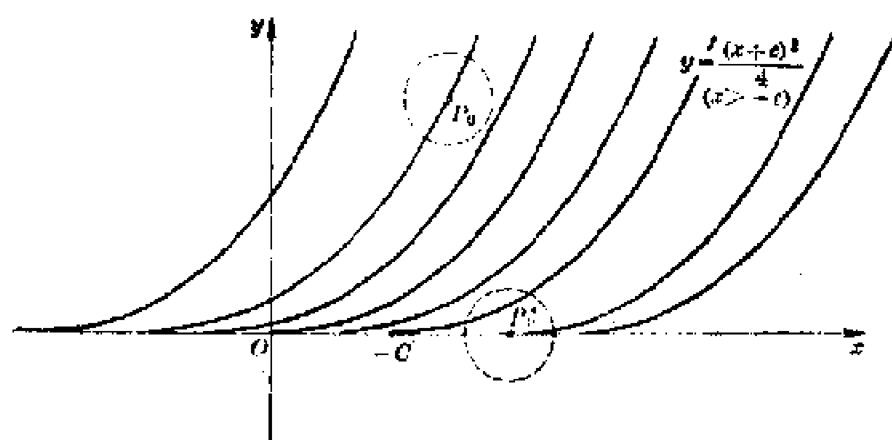


图 2-1

【例题 2】 求解镭的衰变方程

$$\frac{dR}{dt}=-aR, \tag{14}$$

其中比例常数 $a>0$(参考第一章的第一节)．

利用变量分离法，得

$$\frac{dR}{R}=-a\,dt \quad (设\ R\neq 0),$$

再取不定积分，便求得通积分

$$\log|R| = -at + C_1$$

（这里 log 表示自然对数）．由此可以解出

$$|R| = e^{C_1}e^{-at},$$

或去绝对值，得到

$$R = C_2 e^{-at} \quad (\text{其中 } C_2 = \pm e^{C_1}).$$

在求解过程的开头，我们设 $R \neq 0$，这与这里的 $C_2 \neq 0$ 相符合．但是，$R=0$ 显然也是微分方程(14)的一个特解．因此，可以去掉上面对 $C_2 \neq 0$ 的限制，而把微分方程(14)的通解写成

$$R = Ce^{-at}, \tag{15}$$

这里 C 是一个任意常数．注意，当 $C=0$ 时，即得特解 $R=0$.

如果再考虑初始条件

$$R(t_0) = M, \tag{16}$$

则由通解(15)推出

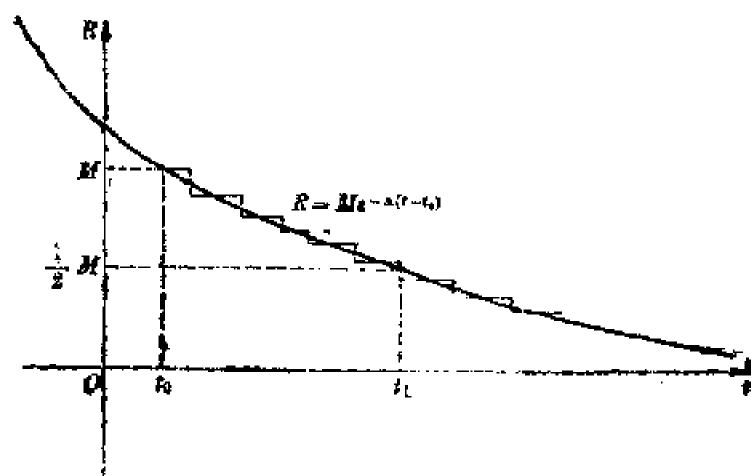
$$Ce^{-at_0} = M.$$

由此就确定了任意常数 $C = Me^{at_0}$，再代回(15)，就得到了初值问题(14)+(16)的解为

$$R = Me^{-a(t-t_0)}. \tag{17}$$

而且从求解的过程可见，这初值问题的解必取(17)的形式，所以它是唯一的．

我们从(17)看到，镭的衰变是按指数规律下降的，见图2-2．公式(17)可以用来预报放射性镭的寿命．例如，可以用它来计算镭的半衰期 $\Delta = t_1 - t_0$（即当 $t=t_1$ 时，镭的质量 R 等于初始质量 M 的一半）．利用 $R(t_1) = \frac{1}{2}M$，再代入(17)，



$\Delta=t_1-t_0=1700$ 年

图 2-2

就得

$$\frac{1}{2}M=Me^{-a\Delta},$$

即得 $e^{-a\Delta}=0.5$, 从而

$$\Delta=\frac{1}{a}\log 2.$$

由实验得知：$a=0.00041$/年，因此可算出半衰期 $\Delta=1700$ 年．可见对于镭的放射性污染，需要进行人工处理，而不能期待它自然净化．

最后，我们顺便指出：镭在衰变时放射出去的镭原子的个数应该是正整数，所以镭的质量 $R=R(t)$ 严格说来应该是一个不连续的阶梯函数，而不是一个光滑的指数函数（见示意图 2-2）．但是，要想真实地求出这条阶梯曲线却是相当困难的．实验表明，由微分方程求得的指数曲线是相当令人满意的．通常，我们用数学方法描述自然现象大都是近似的，至于它的合理性只能靠实践来检验．

习 题 2·1

1. 求解下列微分方程，并指出这些方程在 xOy 平面上有意义的区域：

   (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2}{y}$；　　(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2}{y(1+x^3)}$；

   (3) $\dfrac{dy}{dx}+y^2\sin x=0$；　　(4) $\dfrac{dy}{dx}=1+x+y^2+xy^2$；

   (5) $y'=(\cos x\cdot\cos 2y)^2$；　　(6) $xy'=\sqrt{1-y^2}$；

   (7) $y'=\dfrac{x-e^{-x}}{y+e^{y}}$.

2. 求解下列微分方程的初值问题：

   (1) $\sin 2x\,dx+\cos 3y\,dy=0,\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3}$；

   (2) $x\,dx+ye^{-x}dy=0,\quad y(0)=1$；

   (3) $\dfrac{dr}{d\theta}=r,\quad r(0)=2$；　　(4) $y'=\dfrac{\log|x|}{1+y^2},\quad y(1)=0$；

   (5) $\sqrt{1+x^2}\cdot y'=x\cdot y^3,\quad y(0)=1$.

3. 求解下列微分方程，并作出相应积分曲线族的图形：

   (1) $\dfrac{dy}{dx}=\cos x$；　　(2) $\dfrac{dy}{dx}=a\cdot y$　（常数 $a\neq 0$）；

   (3) $\dfrac{dy}{dx}=1-y^2$；　　(4) $\dfrac{dy}{dx}=y^n$　$\left(n=\dfrac{1}{3},\ 1,\ 2\right)$.

4. 跟踪：设 A 从 xOy 平面上的原点 O 出发，沿 x 轴正方向前进；同时 B 从点 $(0,\ b)$ $(b>0)$ 开始跟踪 A，且设 B 与 A 永远保持等距 b. 试求 B 的光滑运动轨迹.

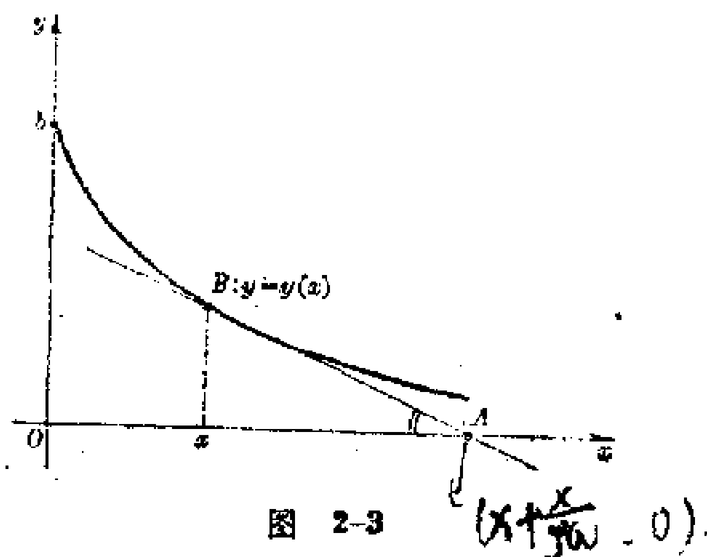


图 2-3

   [提示：参考图2-3设 B 的运动轨迹为 $y=y(x)$，先求出 y 满足的关系式——微分方程式.]

第二节　一阶线性微分方程式

设一阶微分方程式

$$y' = f(x, y) \quad \left({}' \text{表示} \frac{d}{dx}\right)$$

的右端函数 $f(x, y)$ 关于 y 是一次(即线性)的，也就是

$$f(x, y) = a(x)y + b(x),$$

设其中函数 $a(x)$ 与 $b(x)$ 在区间 $\alpha < x < \beta$ 上是连续的. 此时，相应的微分方程可写成

$$y' = a(x)y + b(x). \tag{1}$$

这种类型的微分方程式称为一阶线性微分方程式. 不是线性的微分方程式叫作非线性微分方程式.

例如，下列的一阶微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = x + y; \qquad \frac{dy}{dx} = x^2 y;$$

$$\frac{dR}{dt} = -aR \quad (a\text{ 是常数});$$

$$t \cdot \frac{dx}{dt} = t^2 + x\sin t$$

都是线性的；而下列的一阶微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2; \qquad \frac{ds}{dt} = e^{s+t};$$

$$\frac{dx}{dt} = \sin x; \qquad \frac{dy}{dx} = x \cdot \sqrt{y}$$

则是非线性的.

这一节的内容是求解一阶线性微分方程式(1).

1) 设 $b(x) \equiv 0$，则线性微分方程式(1)变成

$$y' = a(x)y. \tag{2}$$

(2) 式称为齐次线性微分方程式. 这个方程也是变量分离的方程. 因此, 可以采用上一节的分离变量法求出它的通解为

$$y=C\cdot e^{\int_{x_0}^{x}a(x)dx}, \tag{3}$$

其中 C 是一个任意常数.

为了诱导出一般线性微分方程(1)的解法, 我们对齐次线性微分方程(2)的通解(3)做一点分析. 把(3)写成

$$y\cdot e^{-\int_{x_0}^{x}a(x)dx}=C, \tag{4}$$

再对 x 求导数, 即得

$$\frac{d}{dx}\left[y\cdot e^{-\int_{x_0}^{x}a(x)dx}\right]=0. \tag{5}$$

令 $\mu(x)=e^{-\int_{x_0}^{x}a(x)dx}$, 则得

$$\frac{d}{dx}[y\cdot\mu(x)]=0,$$

或

$$\mu(x)\frac{dy}{dx}+\mu'(x)y=0,$$

亦即

$$\mu(x)\left[\frac{dy}{dx}-a(x)y\right]=0. \tag{6}$$

由于 $\mu(x)\neq 0$, 所以得

$$\frac{dy}{dx}-a(x)y=0. \tag{7}$$

这微分方程实际上就是齐次线性微分方程式(2). 因此, 如果把上面的步骤逆退而上, 那么就得到线性微分方程式(7)的一种新的解法, 即: 根据(7), 用函数 $\mu(x)=e^{-\int_{x_0}^{x}a(x)dx}$ (叫作线性微分方程(7)的积分因子)乘方程(7)的两端, 即得方程(6), 从而方程(5)成立. 再取不定积分, 就得到微分方程(7)的通积分(4), 或通解(3). 用这种积分因子乘方程的方法求解齐

次线性微分方程式，其优点是可以用类似的程序求解一般的线性微分方程式(1).

2) 设 $b(x)\neq 0$，则称线性微分方程式 (1) 为非齐次的. 为了采用上述的积分因子法，我们把(1)写成与它等价的形式

$$\frac{dy}{dx}-a(x)y=b(x). \tag{8}$$

再用积分因子

$$\mu(x)=e^{-\int_{x_0}^{x}a(x)dx}$$

乘方程(8)的两端，则得

$$e^{-\int_{x_0}^{x}a(x)dx}\frac{dy}{dx}-e^{-\int_{x_0}^{x}a(x)dx}\cdot a(x)y=b(x)e^{-\int_{x_0}^{x}a(x)dx},$$

亦即
$$\frac{d}{dx}\left[y\cdot e^{-\int_{x_0}^{x}a(x)dx}\right]=b(x)e^{-\int_{x_0}^{x}a(x)dx}.$$

两边取积分，则得到通积分

$$y\cdot e^{-\int_{x_0}^{x}a(x)dx}=\int_{x_0}^{x}b(x)e^{-\int_{x_0}^{x}a(x)dx}dx+C,$$

其中 C 是任意常数. 因此，方程式(8)［亦即(1)］的通解为

$$y=e^{\int_{x_0}^{x}a(x)dx}\left[\int_{x_0}^{x}b(x)e^{-\int_{x_0}^{x}a(x)dx}dx+C\right].$$

读者不必死记这个通解的公式，但是，应掌握上述利用积分因子的求解法，并且通过下面的例题和习题能够熟练地使用这种解法.

【例题 1】 求解微分方程式

$$y'+ky=p\sin\omega x, \tag{9}$$

其中 k, p, ω 都是正的常数.

这是一个非齐次的一阶线性微分方程式，它的积分因子为

$$\mu(x)=e^{\int_0^x k dx}=e^{kx}.$$

用它乘(9)的两端，则得到

$$\frac{d}{dx}[e^{kx}y]=pe^{kx}\sin\omega x.$$

再取不定积分，得

$$e^{kx}\cdot y=\int pe^{kx}\sin\omega x dx+C.$$

从而求得微分方程式(9)的通解为

$$y=e^{-kx}\left(\int pe^{kx}\sin\omega x dx+C\right).$$

再通过对右边不定积分的计算，则得

$$y=\frac{p}{\omega^2+k^2}(k\sin\omega x-\omega\cos\omega x)+Ce^{-kx},$$

其中 C 是任意常数.

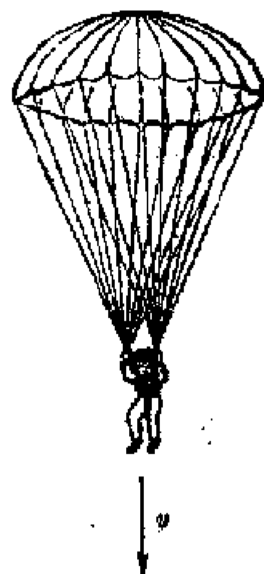


图 2-4

【例题 2】 跳伞. 设跳伞员的质量为 m，降落伞的浮力与它下降的速度 v 成正比，求下降速度 $v=v(t)$ 的变化规律.

先取坐标系. 参看图2-4，我们规定 v 的正向指向地面，则重力 $w=mg$ 是正的，而浮力 $f_0=-kv$ 向上为负(比例常数 $k>0$). 因此，跳伞员所受的外力为

$$F=w+f_0=mg-kv;$$

而惯性力为 $m\frac{dv}{dt}$. 因此，由牛顿的第二运动定律推出跳伞员的运动方程为

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv,$$

这里 $v=v(t)$ 是未知函数. 可以把上面的方程写成

$$\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=g,$$

这是一个非齐次的线性微分方程． 用积分因子 $\mu(t)=e^{\frac{k}{m}t}$ 乘上式两端，即得

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{k}{m}t}v)=g\cdot e^{\frac{k}{m}t}.$$

再取不定积分，得到通积分

$$e^{\frac{k}{m}t}\cdot v=\frac{mg}{k}e^{\frac{k}{m}t}+C.$$

因此，我们求得跳伞运动方程的通解为

$$v=\frac{mg}{k}+Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

由此可见

$$\lim_{t\to\infty}v(t)=\frac{mg}{k}\quad（常速）.$$

这就是说，只要跳伞员在空中有足够长的停留时间，他到达地面时的速度近似地等于常速 mg/k. 而自由落体则是按照加速度 g（即速度 $v=gt+v_0$）落到地面的．

在结束本节的讨论时，我们借此机会指出（一阶）线性微分方程解的三个重要特征：

1) 由一阶线性微分方程(1)的通解

$$y=e^{\int_{x_0}^{x}a(x)dx}\int_{x_0}^{x}e^{-\int_{x_0}^{x}a(x)dx}b(x)dx+Ce^{\int_{x_0}^{x}a(x)dx}\qquad(10)$$

看出，它等于(1)的一个特解（对应于上式的 $C=0$）再加相应的齐次线性方程(2)的通解[参看(3)]． 因此，如果求得非齐次线性微分方程(1)的一个特解为 $y=\varphi_1(x)$ 和相应的齐次线性方程(2)的通解为 $y=Ce^{\int_{x_0}^{x}a(x)dx}$，则(1)的通解为

$$y=Ce^{\int_{x_0}^{x}a(x)dx}+\varphi_1(x).$$

2) 设 $a(x)$ 和 $b(x)$ 在区间 $\alpha<x<\beta$ 上连续，则由上述通解的公式 (10) 可知，线性微分方程 (1) 的一切解在区间 $\alpha<x<\beta$ 上存在．而对于非线性微分方程，一般就没有这种解的全局存在性．例如，非线性微分方程

$$\frac{dy}{dx}=1+y^2$$

关于 x 的定义域为 $-\infty<x<\infty$．而它的解，例如 $y=\operatorname{tg} x$ 的存在区间只是 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$．这就表明，非线性微分方程解的存在区间一般是局部的，而不象线性微分方程的解那样是全局的．

3) 求线性微分方程 (1) 满足初始条件

$$y(x_0)=y_0 \tag{11}$$

的解．由通解 (10)，得 $y(x_0)=C$．因而再由 (11) 确定了 $C=y_0$，即得初值问题 (1)＋(11) 的解为

$$y=e^{\int_{x_0}^{x}a(x)dx}\int_{x_0}^{x}e^{-\int_{x_0}^{x}a(x)dx}b(x)dx+y_0\cdot e^{\int_{x_0}^{x}a(x)dx}.$$

根据上面的解法可知，这也是唯一的解．这就证明了，对于线性微分方程的初值问题，它的解是存在并且唯一的．而对于非线性微分方程的初值问题，它的解有时就不是这样，如在上一节中例题 1 所表明的．

因此，线性微分方程的解在结构上要比非线性微分方程的解简单一些．

习 题 2·2

1．求下列微分方程的通解：

(1) $y'+3y=xe^{-2x}$；　　(2) $y'-2y=x^2e^{2x}$；

(3) $y'+y\cdot\operatorname{tg}x=x\sin 2x\quad\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$；

(4) $xy'+2y=e^x$. $(x>0)$.

2. 求解下列初值问题,并指明解的存在区间是什么:

(1) $y'-y=2xe^{2x}$, $y(0)=1$; (2) $y'+y=\dfrac{1}{1+x^2}$, $y(0)=0$;

(3) $y'+y\cdot\operatorname{ctg}x=2\csc x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$;

(4) $xy'+2y=\sin x$, $y(\pi)=\dfrac{1}{\pi}$.

3. 在下列微分方程中,$x=0$ 是一个奇点(即对应于线性微分方程(1)至少有一个系数函数 $a(x)$或 $b(x)$在该点没有意义).对于 $x>0$,求解这些方程,并且对于不同的积分常数,讨论所求通解当 $x\to 0$ 时的行为(即 $y\to ?$):

(1) $y'+\dfrac{2}{x}y=\dfrac{1}{x^2}$; (2) $y'-\dfrac{1}{x}y=x$;

(3) $y'-\dfrac{1}{x}y=\sqrt{x}$; (4) $y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{\cos x}{x}$.

4* 求解:

(1) $2y\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2$; (2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+y}$.

5* 设 $y=\varphi(x)$和 $y=\psi(x)$ 分别是线性微分方程 $y'+p(x)y=f(x)$ 和 $y'+p(x)y=g(x)$ 的解. 试证 $y=\varphi(x)+\psi(x)$ 是线性微分方程 $y'+p(x)y=f(x)+g(x)$的解.

6* 设 $y=\varphi(x)$满足微分不等式

$$y'+a(x)y\leqslant 0 \quad (x\geqslant 0).$$

求证:

$$\varphi(x)\leqslant\varphi(0)e^{-\int_0^x a(x)dx} \quad (x\geqslant 0).$$

[提示:参考线性微分方程利用积分因子的解法,并且注意对不等式(从 0 到 x) 取积分有什么性质.]

7* 设线性微分方程式为

$$\frac{dx}{dt}+ax=f(t),$$

其中常数 $a>0$, 连续函数 $f(t)$ 是以 2π 为周期的周期函数(即 $f(t+2\pi)=f(t)$ 对一切 t 都成立). 试求这微分方程的一个以 2π 为周期的周期解,并且证明它是唯一的.

第三节　初等变换

在上面两节中所讲的变量分离的微分方程和线性微分方程是可以用初等积分法求解的标准方程．在微分方程的应用中，出现的方程是多种多样的，如果我们能够找到一种初等的变换，把有关的微分方程化到上述两种标准方程之一，那么原来的微分方程也就得解了．至于怎样找到这种初等变换，却无常规可循，只能说是"熟能生巧"．在这一节中，我们向读者介绍几个启发性的变换(包括一些习题)．

3.1　齐次方程

定义　设微分方程

$$y'=f(x,\ y) \tag{1}$$

右端的函数 $f(x,\ y)$ 可以改写为 y/x 的函数 $h\left(\frac{y}{x}\right)$，则称方程(1)为齐次方程．

例如，微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y};\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2\sin\dfrac{y}{x}}{x^2+y^2};$$

$$\frac{dy}{dx}=\log x-\log y;\qquad (x^2+y^2)\,dx+2xy\,dy=0$$

可以分别改写成

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y}{x}};\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2\sin\dfrac{y}{x}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2};$$

$$\frac{dy}{dx}=-\log\frac{y}{x};\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{2}\left[\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^{-1}\right].$$

所以它们都是齐次方程. 而微分方程

$$y'=x\sin\frac{y}{x}\quad 和\quad y'=\frac{x+y^2}{x+y}$$

则不是齐次方程.

读者须要注意：这里说的齐次方程与上一节中讲的齐次线性方程不是一回事. 例如，$y'=xy$ 是齐次线性微分方程，而不是本节所说的齐次方程；又 $y'=-\log\frac{y}{x}$ 是齐次方程，而不是齐次线性微分方程.

解法 设(1)是齐次方程. 我们首先把它改写成

$$\frac{dy}{dx}=h\left(\frac{y}{x}\right),\tag{2}$$

然后作变换

$$u=\frac{y}{x}\quad (或\ y=xu),\tag{3}$$

这里 u 是新的未知函数. 把变换(3)代入齐次方程(2)，得到

$$x\frac{du}{dx}+u=h(u),$$

由此推出

$$\frac{du}{dx}=\frac{h(u)-u}{x}.$$

这是一个变量分离的方程，因此可以按第一节中的分离变量法求出它的通积分，再通过变换(3)，得到方程(2)的通积分.

【例题1】 求解

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}.\tag{4}$$

这是一个齐次方程，它可改写成

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}},$$

令 $y=xu$，代入方程，得

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{1+u}{1-u}.$$

把它化简成

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1+u^2}{1-u}.$$

再利用分离变量法，就得

$$\frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x}.$$

两边取不定积分，推得

$$\operatorname{arc\,tg} u-\log\sqrt{1+u^2}=\log|x|-\log C\quad(C>0).$$

（这里把积分任意常数写成 $-\log C$ 完全是为了使下面的结果变得比较简便.）再去掉对数，就得

$$|x|\cdot\sqrt{1+u^2}=Ce^{\operatorname{arc\,tg} u}.$$

因为 $y=xu$，所以我们得到齐次方程(4)的通积分为

$$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}. \tag{5}$$

如果用极坐标 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则(5)变成 $r=Ce^{\theta}$。由此可见，齐次方程(4)的积分曲线都是螺旋曲线.

【例题 2】 探照灯的反光曲面：设所求的曲面是由曲线 $y=y(x)$ 绕 x 轴旋转而成的（参看图 2-5）. 并设光源位于原点 O，而以 $P(x, y)$ 表示曲线 $y=y(x)$ 上的动点，以 $\overline{PQ}$ 表示曲线在 P 点的切线.

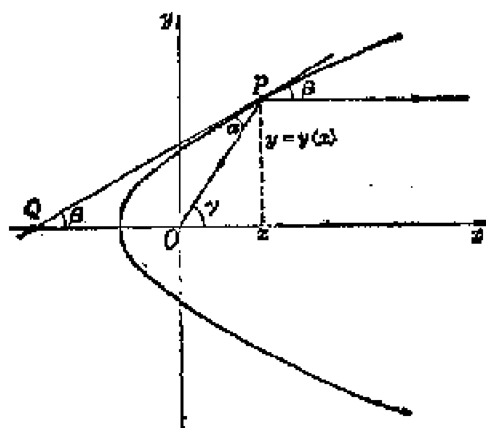


图 2-5

我们需要自光源 O 发出的光线经反光曲面反射而成平行于 x 轴的光束. 由光学的反射定

律（即光线的入射角等于反射角）推出 $\alpha=\beta$. 再由平行直线的同位角推出 $\gamma=\alpha+\beta=2\beta$. 而切线 $\overline{PQ}$ 的斜率为 $\operatorname{tg}\beta=y'$; 向径 $\overline{OP}$ 的斜率为 $\operatorname{tg}\gamma=y/x$. 所以根据三角公式

$$\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}2\beta=\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta},$$

推出
$$\frac{y}{x}=\frac{2y'}{1-(y')^2}.$$

由此不难解出

$$y'=-\frac{x}{y}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}, \tag{6}$$

或

$$y'=-\frac{x}{y}-\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}. \tag{7}$$

注意，只要把 y 换成 $-y$, 方程(7)就变成(6). 因此，不妨只讨论(6)，它是一个齐次方程.

按方程(6)的形式，把 x 看作 y 的未知函数比较方便. 所以把(6)写成

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{-\frac{x}{y}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}}. \tag{8}$$

令 $x=y\cdot u$. 代入上式，得

$$u+y\frac{du}{dy}=\frac{1}{-u+\sqrt{1+u^2}}=u+\sqrt{1+u^2}.$$

从而得到
$$y\frac{du}{dy}=\sqrt{1+u^2},$$

再分离变量，得

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{dy}{y}.$$

取不定积分，得到通积分

$$\log\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)=\log y+\log C,$$

亦即

$$u+\sqrt{1+u^2}=Cy. \tag{9}$$

因为 $u+\sqrt{1+u^2}$ 与 $u-\sqrt{1+u^2}$ 的乘积等于 -1，所以由(9)可得

$$u-\sqrt{1+u^2}=\frac{-1}{Cy}. \tag{10}$$

把(9)式和(10)式的两端分别相加，得

$$u=\frac{1}{2}\left(Cy-\frac{1}{Cy}\right).$$

再利用关系式 $u=x/y$，则得到方程(8)的通解为

$$x=\frac{C}{2}\left(y^2-\frac{1}{C^2}\right), \tag{11}$$

其中 $C(\neq 0)$ 是任意常数．这是抛物线的方程，容易画出它的图形(图 2-5)．这就说明了为什么探照灯的反光镜面须要做成旋转的抛物面．

3.2 二次方程

定义 设一阶微分方程

$$y'=f(x,\ y) \tag{12}$$

的右端函数 $f(x,\ y)$ 关于 y 是一个二次的多项式，则称微分方程(12)为*二次方程*．

根据定义，二次方程的一般形式可以写成

$$y'=p(x)y^2+q(x)y+r(x). \tag{13}$$

这里设系数函数 $p(x)$，$q(x)$ 和 $r(x)$ 是区间 $\alpha<x<\beta$ 上已知的连续函数，而且 $p(x)\neq 0$．在文献中，二次方程(13)通常叫作*黎卡提*(Riccati)*方程*．黎卡提方程是非线性的微分方程．

在第二节中，已经介绍了线性微分方程的解法．但是，能够提供的非线性微分方程的求解法是不多的．由于二次方程

(黎卡提方程)在形式上是最简单的非线性微分方程，而且它与以后将要讲到的二阶线性齐次微分方程有密切的联系，所以在历史上对它有比较多的研究. 但由于篇幅所限，我们不能详细讲述了，在这里只是为了向读者介绍一点历史知识和作变换的技巧，顺便证明下面两个命题.

命题 1 设已知黎卡提方程(13)的一个特解 $y=\varphi(x)$，则可求得它的通解.

【证明】 对黎卡提方程(13)作变换

$$y=u+\varphi(x). \tag{14}$$

其中 u 是新的未知函数(不妨设 $u\neq 0$)，代入方程(13)，得

$$\begin{aligned}u'+\varphi'(x)=&p(x)\left[u^2+2\varphi(x)u+\varphi^2(x)\right]\\&+q(x)\left[u+\varphi(x)\right]+r(x),\end{aligned} \tag{15}$$

由于 $y=\varphi(x)$ 是(13)的解，即

$$\varphi'(x)=p(x)\cdot\varphi^2(x)+q(x)\cdot\varphi(x)+r(x).$$

在方程(15)的两边消去与此相应的项，就得

$$u'=\left[2p(x)\varphi(x)+q(x)\right]u+p(x)u^2.$$

这是一个贝努里(Bernoulli)方程. 再用 u^2 除上式两端，即得

$$u^{-2}u'=\left[2p(x)\cdot\varphi(x)+q(x)\right]u^{-1}+p(x).$$

对于熟悉简单导数公式的读者，容易想到作下面的变换:

$$z=\frac{1}{u}, \tag{16}$$

代入上式，得

$$-z'=\left[2p(x)\cdot\varphi(x)+q(x)\right]z+p(x).$$

这是一个线性微分方程，我们能够求出它的通解. 再由变换(16)和(14)，就得到黎卡提方程(13)的通解(具体的演算留给读者自己去完成). ▌

命题 2 设黎卡提方程

$$y'+by^2=ax^m, \tag{17}$$

其中 m, a, b 都是常数，且设 $b\neq 0$. 又设 $x\neq 0$, $y\neq 0$. 那么在某一个用初等函数表达的变换下，微分方程(17)能够化到变量分离的形式当且仅当(即充分和必要条件)

$$m=0、-2、\frac{-4k}{2k+1}、\frac{-4k}{2k-1} \quad (k=1, 2, \cdots).$$

【证明】 对于这个命题中必要性的证明，由于用到的数学工具已超出本书的范围，所以这里就不证了.

现在只证充分性：不妨令 $b=1$(为什么?)，即得

$$y'+y^2=ax^m. \tag{18}$$

若 $m=0$，则有 $y'=a-y^2$，它是一个变量分离的方程；

若 $m=-2$，作变换

$$z=xy,$$

其中 z 是新的未知函数. 由(18)推得

$$z'=\frac{1}{x}(a+z-z^2).$$

这也是一个变量分离的方程；

若 $m=\frac{-4k}{2k+1}$，作变换

$$x=\xi^{\frac{1}{m+1}}, \quad y=\frac{a}{m+1}\eta^{-1}, \tag{19}$$

其中 ξ 和 η 分别是新的自变量和未知函数. 由(18)推得

$$\frac{d\eta}{d\xi}+\eta^2=\frac{a}{(m+1)^2}\xi^n, \tag{20}$$

其中 $n=-4k/(2k-1)$. 再作变换

$$\xi=\frac{1}{t}, \quad \eta=t-zt^2, \tag{21}$$

其中 t 和 z 又是新的变量，则(20)变成

$$\frac{dz}{dt}+z^2=\frac{a}{(m+1)^2}t^l, \tag{22}$$

其中 $l=-4(k-1)/[2(k-1)+1]$. 由此不难看出，方程(22)与(18)是属同一种类型的. 比较

$$m=\frac{-4k}{2k+1} \quad \text{和} \quad l=\frac{-4(k-1)}{2(k-1)+1}$$

的差别，就可知道，只要上述过程重复 k 次后，就能把方程(18)化到 $m=0$（即得变量分离）的情形.

若 $m=\frac{-4k}{2k-1}$，此时只要注意到它属于方程 (20) 的情形. 因此可以化到方程 (22)，从而化到 $m=0$（即得变量分离）的情形.

总结以上各种情形，就完成了命题中关于充分性的证明. ∎

命题 2 就是在本章开头提到的刘维尔有名的工作，它告诉我们：黎卡提方程 $y'=x^2+y^2$（即莱布尼兹提出求解的方程）不可能通过初等变换求解.

习 题 2·3

1. 求解下列方程:

   (1) $y'=(x+y)/x$; (2) $y'=(2y-x)/(2x-y)$;

   (3) $(3xy+y^2)dx+(x^2+xy)dy=0$.

2. 求解下列方程:

   (1) $y'=-y^2-\frac{1}{4x^2}$; (2) $xy'-3y+y^2=4x^2-4x$.

   [提示：先找一个特解.]

3. 求解贝努里方程:

   $$y'+p(x)y=q(x)y^n \quad (\text{常数 } n\neq 0, 1).$$

   [提示：先用 y^n 除，再考虑作变换.]

4. 试把二阶微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

化成一个黎卡提方程.[提示:令 $y=e^{\int u dx}$,其中 u 是新的未知函数.]

5. 利用变换,求解下列方程:

(1) $y'=\cos(x-y)$; (2) $(x+y)^2y'=1$;

(3) $2y\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y^2}{x+y^2}$; (4) $y'=\dfrac{y\sqrt{y}}{2x\cdot\sqrt{y}-x^2}$;

(5) $3y^2y'-ay^3=x+1$ (a 是常数);

(6) $y'\cos y+x\sin y\cos^2 y=\sin^3 y$;

(7) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y-x+5}{2x-y-4}$; [提示: 令 $x=\xi+h$, $y=\eta+k$, 其中 ξ 和 η 是新的变量, h 和 k 是待定常数,使新方程可解.]

(8) $(x^2+y^2+3)\dfrac{dy}{dx}=2x\left(2y-\dfrac{x^2}{y}\right)$;

(9) $(y-x)\sqrt{1+x^2}\,\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{(1+y^2)^3}$. [提示: 令 $x=\operatorname{tg}\xi, y=\operatorname{tg}\eta$.]

6. 讨论下列微分方程的解法:

(1) $y'=f(a_1x+b_1y+c_1)$;

(2) $y'=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ (其中 a_i, b_i, c_i $(i=1, 2)$都是常数).

7. 求一曲线,使得过这曲线上任一点 P 的切线 $\overline{PQ}$ 与向径 $\overline{OP}$ 的交角等于 45°.

8*. 求解积分方程

$$\int_0^1 \varphi(tx)dt=n\varphi(x),$$

其中常数 $n\neq 0$, φ 是未知函数 (它出现在积分号下, 故名积分方程). [提示: 令 $y(x)=\int_0^x \varphi(u)du$, 再设法把上述积分方程化成一个微分方程.]

第四节 恰当方程

在前几节中，我们在求解微分方程时得到的通积分往往

可以写成如下的形式

$$\phi(x, y)=C. \tag{1}$$

例如，在上一节中方程(4)的通积分(5)可以写成

$$\sqrt{x^2+y^2}\cdot e^{-\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}=C.$$

现在反过来看一看，是否能从(1)得到什么新的东西？假设$\phi(x, y)$是充分光滑的二元函数，而且由(1)确定了y是x的光滑的隐函数，那么由(1)求导数，得到

$$\phi'_x(x, y)+\phi'_y(x, y)y'=0. \tag{2}$$

显然，方程(2)是一个微分方程，它的解(通积分)由(1)给出(其中C是任意常数).

设给定微分方程

$$M(x, y)+N(x, y)y'=0, \tag{3}$$

如果存在一个函数$\phi(x, y)$，使得

$$\phi'_x(x, y)=M(x, y), \quad \phi'_y=N(x, y). \tag{4}$$

在这种情形，我们称微分方程(3)为*恰当方程*.

设$y=y(x)$是恰当方程(3)的任一个解，则有

$$\begin{aligned}0&=M(x, y(x))+N(x, y(x))y'(x)\\&=\phi'_x(x, y(x))+\phi'_y(x, y(x))y'(x)\\&=\frac{d}{dx}[\phi(x, y(x))].\end{aligned}$$

从而，$y=y(x)$满足隐函数方程

$$\phi(x, y)=C,$$

其中C是某个依赖于$y=y(x)$的常数(实际上，$C=\phi(x_0, y_0)$，$y_0=y(x_0)$).

因此，恰当方程(3)的解等价于函数方程(1)的解，亦即(1)是恰当方程(3)的通积分.

在应用上，有时把方程(3)写成更对称的形式

$$M(x, y)dx+N(x, y)dy=0. \tag{5}$$

【例题1】 求解

$$2xy^3\,dx+3x^2y^2\,dy=0.$$

由观察法，我们看到这方程的左端恰好是函数$\phi=x^2y^3$的全微分（亦即$\phi'_x=2xy^3$, $\phi'_y=3x^2y^2$）．因此，得$d(x^2y^3)=0$，从而它的通积分为

$$x^2y^3=C.$$

对于这个简单的例题，由于我们很容易地看到了微分方程的左端恰好是函数$\phi=x^2y^3$的全微分，所以知道它是恰当方程，同时找到了它的通积分．而对于比较复杂的方程，就不可能如此顺利地进行了．下述定理提供了一个解决恰当方程的一般程序．

定理 设函数$M(x, y)$与$N(x, y)$在区域

$$R:\ \alpha<x<\beta,\quad \gamma<y<\delta$$

上连续，且有连续的一阶偏导数M'_y与N'_x，则方程

$$M(x, y)+N(x, y)y'=0 \tag{6}$$

是一个恰当方程的充要条件为

$$M'_y(x, y)=N'_x(x, y) \tag{7}$$

在R内处处成立．也就是说，条件(7)是存在一个满足关系(4)的函数$\phi(x, y)$的充要条件．

【证明】 必要性：设存在一个满足(4)，即

$$\phi'_x=M(x, y),\quad \phi'_y=N(x, y)$$

的函数$\phi(x, y)$，亦即(6)是恰当方程．由此，我们再计算一阶偏导数M'_y和N'_x，得到

$$M'_y=\phi''_{xy},\quad N'_x=\phi''_{yx}. \tag{8}$$

由M'_y和N'_x的连续性假设推出，ϕ''_{xy}和ϕ''_{yx}是连续的．因此，$\phi''_{xy}=\phi''_{yx}$，从而由(8)推出(7)成立．

充分性：设函数 $M(x, y)$ 和 $N(x, y)$ 满足条件(7)，我们要证明(6)是恰当方程，即要构造一个函数 $\phi=\phi(x, y)$，使得(4)式成立．由(4)的第一个等式 $\phi'_x=M(x, y)$，把 y 看成参数，我们对 x 进行积分，得到

$$\phi(x, y)=\int_{x_0}^{x} M(t, y)dt+\psi(y). \tag{9}$$

函数 $\psi(y)$ 是任意的，它关于变量 x 起着常量的作用．这样，就得 $\phi'_x=M(x, y)$．现在须要证明，只要适当选取 $\psi(y)$，就可以使得 $\phi'_y=N(x, y)$．

由(9)，得

$$\phi'_y=\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(t, y)dt+\frac{d\psi}{dy}=\int_{x_0}^{x} M'_y(t, y)dt+\frac{d\psi}{dy}$$
$$=\int_{x_0}^{x} M'_y(x, y)dx+\frac{d\psi}{dy}.$$

利用条件(7)，得到

$$\phi'_y=\int_{x_0}^{x} N'_x(x, y)dx+\frac{d\psi}{dy}$$
$$=N(x, y)-N(x_0, y)+\frac{d\psi}{dy}.$$

为了使 $\phi'_y=N(x, y)$ 能够成立，只要令

$$\frac{d\psi}{dy}=N(x_0, y),$$

亦即只要选取

$$\psi(y)=\int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy.$$

这样一来，就构成了一个满足关系式(4)的函数

$$\phi(x, y)=\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy, \tag{10}$$

其中初始点 $(x_0, y_0)\in R$．从而得到恰当方程(6)的通积分

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy = C.$$

总结以上讨论，定理证完. ▌

【例题 2】 求解

$$(y\cos x + 2xe^y)\,dx + (\sin x + x^2e^y + 2)\,dy = 0. \tag{11}$$

因为 $$M'_y = \cos x + 2xe^y = N'_x,$$

所以(11)是恰当方程. 从而存在函数 $\phi(x, y)$，满足

$$\phi'_x = y\cos x + 2xe^y, \quad \phi'_y = \sin x + x^2e^y + 2.$$

对 x 积分第一式，得

$$\phi = y\sin x + x^2e^y + \psi(y),$$

其中 $\psi(y)$是待定函数. 再把 ϕ 代入上面的第二式，即得

$$\sin x + x^2e^y + \frac{d\psi}{dy} = \sin x + x^2e^y + 2.$$

由此得到 $$\frac{d\psi}{dy} = 2.$$

从而推得 $\psi(y) = 2y$（这里省略了加积分常数，由下面通积分的形式可知，这样并不损害一般性）. 所以

$$\phi(x, y) = y\sin x + x^2e^y + 2y;$$

从而恰当方程(11)的通积分为

$$y\sin x + x^2e^y + 2y = C. \tag{12}$$

在实践上，通常用观察法凑全微分的方法求解恰当方程是很方便的. 例如，对于恰当方程(11)的左端，可以把它凑成一个全微分的形式

$$\begin{aligned}
&(y\cos x + 2xe^y)\,dx + (\sin x + x^2e^y + 2)\,dy \\
&\quad = (y\cos x \cdot dx + \sin x \cdot dy) + (2xe^y dx + x^2e^y dy) + 2dy \\
&\quad = (y\,d\sin x + \sin x\,dy) + (e^y dx^2 + x^2 de^y) + 2dy \\
&\quad = d(y\sin x) + d(x^2e^y) + d(2y) \\
&\quad = d(y\sin x + x^2e^y + 2y).
\end{aligned}$$

由(11)，得 $$d(y\sin x+x^2e^y+2y)=0,$$
从而 $$y\sin x+x^2e^y+2y=C.$$
它与通积分(12)一致.

【例题 3】 求解

$$(3x^2+2xy)+(x+y^2)\frac{dy}{dx}=0. \tag{13}$$

假设存在函数 $\phi(x, y)$，满足

$$\phi'_x=3x^2+2xy, \quad \phi'_y=x+y^2.$$

积分第一式，得

$$\phi=x^3+x^2y+\psi(y);$$

再代入第二式，得到

$$x^2+\psi'(y)=x+y^2,$$

即

$$\psi'(y)=x+y^2-x^2. \tag{14}$$

由于(14)的左端 $\psi'(y)$ 与 x 无关，而右端却与 x 有关. 这是矛盾的. 这是怎么一回事呢？ 原来对于方程(13)，有 $M'_y=2x$ 与 $N'_x=1$，因而 $M'_y\neq N'_x$，即(13)不是恰当方程. 自然对它不能采用与上述恰当方程相同的解法.

最后，我们顺便指出，在求解恰当方程时，主要是构造一个满足关系式(4)的函数 $\phi(x, y)$. 这实际上就是场论中的位势问题. 在单连通区域 R 上条件(7)保证了线积分

$$\phi(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} M(x, y)dx+N(x, y)dy \tag{15}$$

与积分的路径无关，因此，公式(15)规定了一个单值的函数 $\phi(x, y)$，而在公式(10)中所取的积分路径仅仅是一个简单的路径. 如果区域不是单连通的，那么一般说来 $\phi(x, y)$ 可能是多值的. 例如，对于方程

$$\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0,$$

容易验证条件(7)在非单连通区域

$$R_0:\ 0<x^2+y^2<1$$

上成立．由于

$$d\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2},$$

所以我们得到 $\phi(x, y)=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$，它在区域 R_0 上是一个多值的函数．（实际上，这里的 $\phi(x, y)$ 就是变点 $P(x, y)$ 的幅角，因此当变点 P 在 R_0 内逆时针绕原点转一圈时，$\phi(x, y)$ 的值就要增加 2π．）

习　题　2·4

判别下列方程是否为恰当方程；并且对恰当方程求解．

1．$(2x+3)+(2y-2)y'=0$．

2．$(2x+4y)+(2x-2y)y'=0$．

3．$(ax+by)dx+(bx+cy)dy=0$．

4．$(ax-by)dx+(bx-cy)dy=0\quad(b\neq 0)$．

5．$(9x^2+y-1)-(4y-x)y'=0$．

6．$(2x^2y+2x)y'+(2xy^2+2y)=0$．

7．$(e^x\sin y-2y\sin x)dx+(e^x\cos y+2\cos x)dy=0$．

8．$(e^x\sin y+3y)dx-(3x-e^x\sin y)dy=0$．

9．$\left(\frac{y}{x}+6x\right)dx+(\log x-2)dy=0$．

10．$\frac{xdx+ydy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0$．

第五节　积 分 因 子

我们在上一节中讲了恰当方程的求解法，在这一节中要

讲述如何把某些微分方程化成恰当方程.

设微分方程

$$M(x, y)dx+N(x, y)dy=0 \tag{1}$$

不是恰当方程,我们要找一个函数 $\mu=\mu(x, y)(\neq 0)$,使得它乘方程(1)的两边之后,得到一个恰当方程

$$\mu M dx+\mu N dy=0. \tag{2}$$

即要求充要条件

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu N)=\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) \tag{3}$$

成立. 这时, 函数 $\mu(x, y)$ 称为微分方程(1)的一个积分因子.

因为方程(1)和(2)是等价的, 所以, 如果能够找到方程(1)的一个积分因子,那么它的求解问题就能得到解决了. 但是, 一般而言, 求积分因子 $\mu(x, y)$的问题, 如条件(3)所表示的那样,是一个偏微分方程的求解问题. 以后我们将会知道,这后一问题实际上与方程(1)的求解问题是等价的. 所以求积分因子这种方法在实践上也只适用于某些特殊类型的微分方程,而不是对任何方程都是有效的.

设微分方程(1)有一个只与 x 有关的积分因子,则由充要条件(3)推出

$$N\frac{d\mu(x)}{dx}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu(x),$$

或

$$\frac{1}{\mu(x)}\cdot\frac{d\mu(x)}{dx}=\frac{\dfrac{\partial M(x, y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{N(x, y)}. \tag{4}$$

由于这等式的左端只依赖于 x, 而与 y 无关, 所以微分方程(1)有一个只依赖于 x 的积分因子的必要条件是表达式

$$\frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{N(x, y)} \tag{5}$$

只依赖于 x，而与 y 无关.

反之，设表达式 (5) 只依赖于 x，而与 y 无关；我们用 $G(x)$ 表示它. 参考 (4)，令

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dx}=G(x).$$

从而推得

$$\mu(x)=e^{\int_{x_0}^{x}G(x)dx} \tag{6}$$

是微分方程 (1) 的一个积分因子. 把上述推导归纳成一个定理：

定理 1 微分方程 (1) 有一个只依赖于 x 的积分因子的必要和充分条件是：表达式 (5) 只依赖于 x，而与 y 无关；而且设表达式 (5) 等于 $G(x)$，则 (6) 中的 $\mu(x)$ 是微分方程 (1) 的一个积分因子.

同样，可以推出下面的定理：

定理 2 微分方程 (1) 有一个只依赖于 y 的积分因子的必要和充分条件是：表达式

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=H(y)$$

只依赖于 y；而且此时 $\mu(y)=e^{\int_{y_0}^{y}H(y)dy}$ 是微分方程 (1) 的一个积分因子.

【例题 1】 求解

$$(3xy+y^2)dx+(x^2+xy)dy=0. \tag{7}$$

我们算出

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{(3x+2y)-(2x+y)}{x^2+xy}=\frac{1}{x}$$

与 y 无关．因此，由(6)推得方程(7)的一个积分因子

$$\mu(x)=x.$$

所以用 $\mu=x$ 乘方程(7)之后，得到一个恰当方程

$$(3x^2y+xy^2)dx+(x^3+x^2y)dy=0. \tag{8}$$

对于方程(8)，我们可利用观察法得到：

$$\begin{aligned}&(3x^2y+xy^2)dx+(x^3+x^2y)dy\\&\quad=(3x^2ydx+x^3dy)+xy(ydx+xdy)\\&\quad=(ydx^3+x^3dy)+(xy)d(xy)\\&\quad=d\left[y\cdot x^3+\frac{1}{2}(xy)^2\right]=0.\end{aligned}$$

从而得到通积分

$$y\cdot x^3+\frac{1}{2}x^2\cdot y^2=C.$$

我们在这里指出：用积分因子的观点可以统一前几节所讲的各种初等积分法．例如：

1) 变量分离的方程

$$A(x)\cdot B(y)dx+C(x)\cdot D(y)dy=0$$

有积分因子

$$\mu(x,\ y)=\frac{1}{B(y)\cdot C(x)}\quad (B(y)\cdot C(x)\neq 0)$$

2) 一阶线性微分方程

$$y'+p(x)y=q(x)$$

有积分因子 $\qquad \mu=e^{\int_{x_0}^{x}p(x)dx}.$

3) 齐次方程

$$y'-h\left(\frac{y}{x}\right)=0$$

有积分因子

$$\mu=\frac{1}{xh\left(\frac{y}{x}\right)-y}\quad\left[xh\left(\frac{y}{x}\right)-y\neq 0\right].$$

(请读者自己验证.)

求积分因子的方法须要灵活运用. 下面举一个用观察法求积分因子的例子.

【例题 2】 求解

$$(x+y)dx+(y-x)dy=0.$$

因为

$$\begin{aligned}&(x+y)dx+(y-x)dy\\&=(xdx+ydy)-(xdy-ydx)\\&=\frac{1}{2}d(x^2+y^2)-(x^2+y^2)d\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},\end{aligned}$$

所以容易看到 $\mu=\frac{1}{x^2+y^2}$ 是一个积分因子; 用它乘微分方程 (9), 得

$$\begin{aligned}&\mu\cdot(x+y)dx+\mu\cdot(y-x)dy\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2}-d\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=0.\end{aligned}$$

因此, 得到方程(9)的通积分为

$$\log\sqrt{x^2+y^2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=\log C,$$

或

$$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}$$

(参看第三节的例题 1(5)).

习 题 2.5

1. 用积分因子求解下列方程:

(1) $(3x^2y+2xy+y^3)dx+(x^2+y^2)dy=0$;

(2) $y'=e^{2x}+y-1$;

(3) $dx+\left(\dfrac{x}{y}-\sin y\right)dy=0$;

(4) $ydx+(2xy-e^{-2y})dy=0$;

(5) $e^x dx+(e^x \operatorname{ctg} y+2y\csc y)dy=0$;

(6) $\left(3x+\dfrac{6}{y}\right)dx+\left(\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{3y}{x}\right)dy=0$.

2*. 证明微分方程 $Mdx+Ndy=0$ 有形如 $\mu=\mu(x\cdot y)$ 的积分因子的充要条件是:

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{x\cdot M-y\cdot N}=F(x\cdot y)$$

只依赖于乘积 $(x\cdot y)$.

第六节* 几 个 杂 例

一阶微分方程的应用范围本来是很广泛的，我们在这一节中收集了几个有一定代表性的杂例.

【例题 1】 求一曲线族的正交轨线族.

形式如

$$\phi(x,\ y,\ C)=0 \tag{1}$$

的方程通常确定了一个以 C 为参数的曲线族. 对于参数 C 的每个特定值(在允许的范围内)，由(1)确定一条曲线. 象我们已经知道的那样，一阶微分方程的通积分(或通解)就是这样的曲线族(积分曲线族).

现在，我们再考虑第二个曲线族

$$\psi(x,\ y,\ k)=0, \tag{2}$$

这里 k 是参数. 如果曲线族(1)的任一条曲线与曲线族(2)的任一条曲线都相交，而且互相正交(即它们在交点的切线是互相垂直的)，那么曲线族(1)和(2)叫作互为正交轨线族.

大家比较熟悉的正交轨线族的例子有：在平面直角坐标系中分别与坐标轴平行的两组平行直线族(即 $x=C$ 和 $y=k$)以及在极坐标系中的同心圆族和径向射线族(即 $r=C$ 和 $\theta=k$). 一般地说，两个互相正

交的曲线族往往可用作坐标系．在某些物理与力学问题中，正交轨线族有重要的意义，例如在静电场中的电力线族与等势线族等．

对于一个给定的曲线族(1)，怎样确定它的正交轨线族呢？这里主要用到的论据是：两条正交的平面曲线在交点的斜率互为负倒数．为了求曲线族(1)的任一曲线的斜率，我们对隐函数(1)求导数，就得到

$$\phi'_x(x, y, C)+\phi'_y(x, y, C)\frac{dy}{dx}=0,$$

或

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1)}=-\phi'_x(x, y, C)/\phi'_y(x, y, C). \tag{3}$$

这里的足标(1)表示这种导数是对曲线族(1)计算的；而且设

$$\phi'_y(x, y, C)\neq 0.$$

应该指出，在公式(3)中，右端既依赖于 x, y，又可能依赖于参数 C，它在表面上似乎还是不确定的．但是，我们不要忘记式子(1)．例如，设从(1)式解出 $C=u(x, y)$，再代入公式(3)的右端，就得到一个微分方程式

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1)}=H(x, y), \tag{4}$$

其中 $\qquad H(x, y)=-\phi'_x(x, y, u(x, y))/\phi'_y(x, y, u(x, y))$.

显然，(1)是微分方程(4)的通积分．

为了求曲线族(1)的正交轨线族，用 $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2)}$ 表示所求正交轨线的斜率，那么由上面提到的论据，即得

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2)}=\frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1)}}=\frac{-1}{H(x, y)} \quad (\text{设 } H(x, y)\neq 0).$$

因此，我们得到了一个所求正交轨线满足的微分方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{H(x, y)}. \tag{5}$$

再求它的通解，即得曲线族(1)的正交轨线族．

例如，求椭圆族

$$x^2+2y^2=C^2 \quad (C>0) \tag{6}$$

的正交轨线族(参看图 2-6)．

椭圆族(6)的微分方程可以由求导数得到，即对隐函数(6)求导数，得到

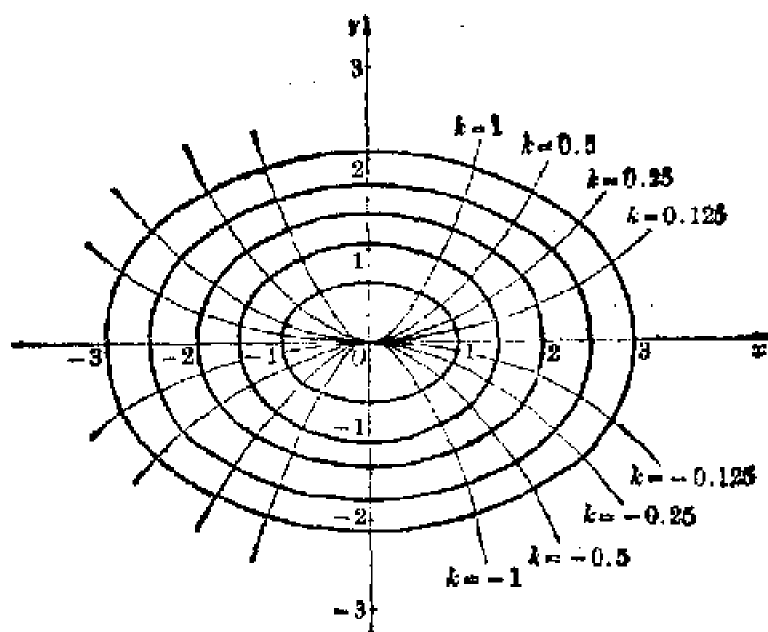


图 2-6

$$2x+4y\frac{dy}{dx}=0,$$

或
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1)}=-\frac{x}{2y}.$$

因此，所求正交轨线族的微分方程为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}.$$

这是一个变量分离的方程，从而得

$$\frac{dy}{y}=\frac{2dx}{x}.$$

取不定积分，得到

$$\log y=\log x^2+\log k,$$

或

$$y=kx^2. \tag{7}$$

这里 k 是任意常数(注意，k 可以等于 0，即 $y=0$ 也是所求的解)．曲线族(7)就是椭圆族(6)的正交轨线族．当 $k\neq 0$ 时，曲线族(7)表示顶点在原点的一族抛物线．

【例题 2】 发射登月体需要多大的初速?

发射登月体需要有多大的初速?根据牛顿的万有引力定律，可以对

这个问题进行初步的分析与估算。为了不使问题过于复杂，我们特作如下理想化的假设：

1）地球与月球都是完全的圆球。令它们的半径分别为 R_e 与 R_m，质量分别为 M_e 与 M_m；

2）登月体（火箭）的质量为常量 m，而且在地球表面上以初速 v_0 垂直向上发射，直线指向月球的中心。

3）不计地球与月球的转动，也不考虑太阳与其他星球的影响；

4）不计空气的阻力。

参看图2-7，用直线联结地球和月球的中心作为坐标轴 r，原点 O 取在这直线和地面的交点（即火箭的发射点），并设 r 轴的正向指向月球。根据上面的假设，登月体将沿 r 轴作直线运动。因此，它的运动规律可以用它的位置坐标 $r=r(t)$ 来表示，

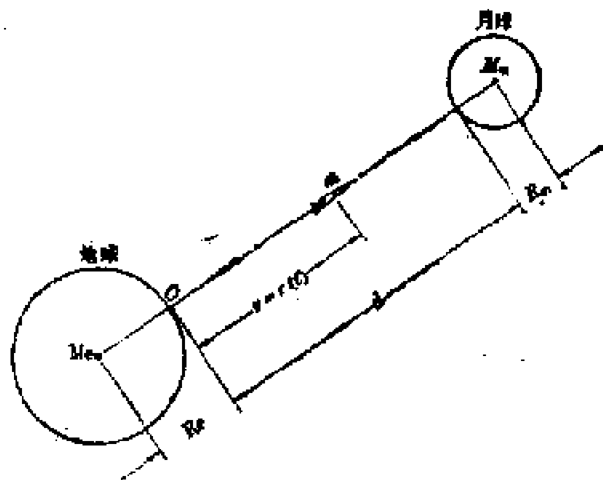


图 2-7

而且 $v=\dfrac{dr}{dt}$ 与 $a=\dfrac{dv}{dt}$ 分别表示速度和加速度。根据牛顿的第二运动定律，有 $m\dfrac{dv}{dt}=$外力 F；而这外力 $F=f_e+f_m$，其中 f_e 与 f_m 分别表示地球与月球对登月体的引力。由牛顿的万有引力定律推出

$$f_e=-G\cdot\frac{m\cdot M_e}{(r+R_e)^2},\quad f_m=-G\cdot\frac{m\cdot M_m}{(d+R_m-r)^2}.$$

其中引力常数 $G>0$，d 是地球表面与月球表面之间的距离。因此我们得到登月体的运动方程为

$$m\frac{dv}{dt}=-G\cdot\frac{m\cdot M_e}{(r+R_e)^2}+G\cdot\frac{m\cdot M_m}{(d+R_m-r)^2}.\tag{8}$$

由于 $v=\dfrac{dr}{dt}$，所以 $\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dr}\cdot\dfrac{dr}{dt}=v\dfrac{dv}{dr}$，于是方程 (8) 化成一个一阶的微分方程式

$$v\frac{dv}{dr}=-\frac{G\cdot M_e}{(r+R_e)^2}+\frac{G\cdot M_m}{(d+R_m-r)^2}.\tag{9}$$

其中 r 是自变量，v 是未知函数．方程(9)是一个变量分离的方程，可直接对 r 取不定积分，得到

$$\frac{1}{2}v^2=\frac{G\cdot M_e}{r+R_e}+\frac{G\cdot M_m}{d+R_m-r}+C. \tag{10}$$

再利用初始条件

$$\text{当 } r=0 \text{ 时，}\quad v=v_0,$$

可确定常数 $$C=\frac{1}{2}v_0^2-\frac{G\cdot M_e}{R_e}-\frac{G\cdot M_m}{d+R_m}.$$

从而由(10)得到

$$\frac{1}{2}(v^2-v_0^2)=\frac{G\cdot M_e}{r+R_e}+\frac{G\cdot M_m}{d+R_m-r}-\frac{G\cdot M_e}{R_e}-\frac{G\cdot M_m}{d+R_m}. \tag{11}$$

现在，我们来求初速 v_0，使火箭到达中性点 r_n 时的速度为零，即

$$-\frac{1}{2}v_0^2=\frac{G\cdot M_e}{r_n+R_e}+\frac{G\cdot M_m}{d+R_m-r_n}-\frac{G\cdot M_e}{R_e}-\frac{G\cdot M_m}{d+R_m}. \tag{12}$$

这里所谓中性点 r_n，指的是地球对登月体的引力 f_e 与月球对登月体的引力 f_m 相互平衡之点，即满足 $f_e=f_m$ 之点，或

$$G\cdot\frac{m\cdot M_e}{(r_n+R_e)^2}=G\cdot\frac{m\cdot M_m}{(d+R_m-r_n)^2}. \tag{13}$$

设 g_e 与 g_m 分别表示地球与月球的重力加速度，则

$$m\cdot g_e=G\cdot\frac{m\cdot M_e}{R_e^2},\quad m\cdot g_m=G\cdot\frac{m\cdot M_m}{R_m^2},$$

亦即

$$GM_e=g_e\cdot R_e^2,\quad GM_m=g_m\cdot R_m^2. \tag{14}$$

再利用天文学上的一些近似公式：

$$d=386,242 \text{ 公里};\quad R_e=6,437 \text{ 公里};$$

$$g_e=6g_m=9.8 \text{ 米/秒}^2;\quad R_m=\frac{\sqrt{6}}{9}R_e.$$

根据(13)可算出

$$r_n=\frac{1}{10}[9d+(\sqrt{6}-1)R_e].$$

又由(12)得到

$$\frac{1}{2}v_0^2=\frac{g_e\cdot R_e^2}{R_e}+\frac{g_m\cdot R_m^2}{d+R_m}-\frac{g_e\cdot R_e^2}{r_n+R_e}-\frac{g_m\cdot R_m^2}{d+R_m-r_n},$$

由此可算出近似值

$$v_0=11.1\text{ 公里/秒.}$$

这就是说：为了使登月体到达月球，就须要初速 $v_0>11.1$(公里/秒). 现代的火箭技术还不能达到这样高的初速，因此火箭须要在飞行的过程中不断加速．而且实际的轨道也不能是直线．

【例题 3】 对我国人口总数发展趋势的一种估算．

人口问题是一个很复杂的生物学和社会学问题，用数学方法来研究它，还只能说是一种尝试．我们在这一节中介绍一个相当简略的数学模型．

令 $p(t)$ 表示某一国家在时间 t 的人口总数．这样，$p(t)$ 当然是一个不连续的阶梯函数，为了应用微积分的方法，我们用一个光滑的函数近似地(插值)代替它，而把这个光滑函数仍记作 $p(t)$．再令 $r=r(t, p)$ 表示出生率和死亡率之差．如果不考虑移民问题，那么人口的变化率 $\dfrac{dp}{dt}$ 等于 r 与 p 的乘积，即

$$\frac{dp}{dt}=rp. \tag{15}$$

最简单的情形是假设 r 等于常数 $a>0$，于是得

$$\frac{dp}{dt}=ap. \tag{16}$$

再考虑初始条件

$$p(t_0)=p_0. \tag{17}$$

容易求得初值问题(16)+(17)的解为

$$p(t)=p_0e^{a\cdot(t-t_0)}.$$

它表明，在上述假设下，人口总数是按照指数曲线增长的．这也就是马尔萨斯人口论的理论依据．我们现在看到，这个理论的依据是十分贫乏的，而且事实上它早被马克思主义经典作家和社会实践所驳倒．

后来，人们通过实验又提出假设

$$r=a-bp,$$

其中正常数 a 与 b 叫作**生命系数**．一些生态学家测得 a 的自然值等于 0.029，而 b 的值依赖于各国的社会经济条件．这样，我们就得到

$$\frac{dp}{dt}=(a-bp)p. \tag{18}$$

这是一个变量分离的方程，现在对它求解如下：

$$\frac{dp}{p(a-bp)}=dt \quad \left(设\ p\neq 0,\ \frac{a}{b}\right),$$

取积分即得
$$\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p(a-bp)}=\int_{t_0}^{t}dt.$$

由此得到
$$\frac{1}{a}\log\frac{p}{a-bp}\Big|_{p_0}^{p}=t-t_0,$$

或
$$\log\frac{p(a-bp_0)}{p_0(a-bp)}=a\cdot(t-t_0).$$

从而
$$\frac{p}{a-bp}=\frac{p_0e^{a\cdot(t-t_0)}}{a-bp_0}.$$

由此解得初值问题(18)+(17)的解为

$$p=\frac{ap_0e^{a\cdot(t-t_0)}}{a-bp_0+bp_0e^{a\cdot(t-t_0)}}. \tag{19}$$

据说，美国和法国曾经用这个公式预报过人口的变化，结果是相当符合实际的；而比利时则不甚符合．至于这个公式是否也适用于中国，有待于实践的检验．现在，我们如果也用它来分析我国人口总数的变化趋势，那么由(19)不难看到

$$\lim_{t\to\infty}p(t)=\frac{a}{b}=\frac{0.029}{b}.$$

这就是说，我国人口总数最后将接近于总数 $N=0.029/b$．现在我们来确定常数 b 的值：

根据 1980 年 5 月 1 日公布的数字，我国人口总数在 1979 年底为 97,092 万人．而且我们假设人口增长率在全国范围内平均为千分之十，亦即大致上 $\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}$ 的平均值为 1%．则由(18)得到

$$0.01=a-9.7092\times10^8\times b.$$

因为已知 $a=0.029$，所以推出

$$b=0.019/(9.7092\times10^8).$$

于是
$$N=0.029/b=14.7677\times10^8 \quad (人)$$

这就是说，如果我们按照上述假设来预报我国人口发展的趋势，大概会接近十五亿人．这也是一个不小的数字．如果我们能够通过计划生育的政策，把人口增长率压低到千分之五(或千分之一)，那么仿照上述计算可算出我国人口总数的趋势将是 11.7316×10^8(或 10.0558×10^8)人．

习 题 2·6

1. 求下列各曲线族的正交轨线族:

   (1) $x^2+y^2=Cx$;　　(2) $xy=C$;

   (3) $2Cy+x^2=C^2$　$(C>0)$;　　(4) $x^2+C^2y^2=1$.

2. 求与下列曲线族相交成 $45°$ 角的曲线族:

   (1) $x-2y=C$;　　(2) $xy=C$.

3. 逃逸速度: 设地球的半径 $R=6,437$ 公里, 地面上的重力加速度 $g=9.8$ 米/秒^2, 又设质量为 m 的火箭在地面以初速 v_0 垂直上升. 假设不计空气的阻尼和其他任何星球的引力, 而只考虑地球与火箭之间的万有引力. 试求火箭的逃逸速度, 即: 使火箭一去不复还的最小的初速 v_0.

4. 在人口问题的例题中,对于方程(18)证明: 当 $p<\frac{a}{2b}$ 时, $\frac{dp}{dt}$ 是递增的; 当 $p>\frac{a}{2b}$ 时, $\frac{dp}{dt}$ 是递减的.

第二章小结

熟练地掌握本章的初等积分法是求解常微分方程的基本训练.

1. **对于一个给定的一阶微分方程, 首先要能够判别它的类型(例如, 它是变量分离的, 或是黎卡提的, 或是其他什么的).**
2. **重点掌握分离变量法和一阶线性方程的积分因子求解法; 再总结在一些例题和习题中出现的初等变换(也包括积分因子)的技巧和思想方法.**
3. **要善于处理在解题过程中出现的积分常数, 使得通解的形式比较简单; 同时注意不要遗漏某些特解.**
4. **注意一阶线性和非线性微分方程解的某些不同的特征.**

第三章

存在性与唯一性定理

在前两章中，我们已经知道常微分方程的一个重要课题是求解。但是我们看到，只有对某些特殊类型的微分方程可以用初等积分法求解，而对于大部分微分方程则不能(甚至对形式上是很简单的微分方程，例如莱布尼兹提出的方程 $y'=x^2+y^2$)。这里自然产生一个问题：不能用初等积分法求解的微分方程是否意味着它(或它的初值问题)没有解呢？或者，常微分方程的一个初值问题究竟在什么条件下是有解的，而且是唯一的？这一章主要就是从理论上来解答这些问题。

第一节　微分方程的几何解释

我们知道，在数学的讨论中经常采用一些几何的解释，这有助于从直观上理解问题和启发思考。现在，我们也对一阶微分方程

$$y'=f(x,\ y) \tag{1}$$

作如下的几何解释：

设 $y=\varphi(x)$ 是微分方程(1)的任一个解，而且它在 $(x,\ y)$ 平面上所表示的曲线(即积分曲线)为 Γ。在积分曲线 Γ 上任取一点 $P_0(x_0,\ y_0)$，由解的定义推出：积分曲线 Γ 在 P_0 点的切线 l_{P_0} 的斜率为 $\operatorname{tg}\alpha=\varphi'(x_0)=f(x_0,\ \varphi(x_0))=f(x_0,\ y_0)$。从这一关系式，我们注意到一个重要的事实：因为 $f(x_0, y_0)$ 只决

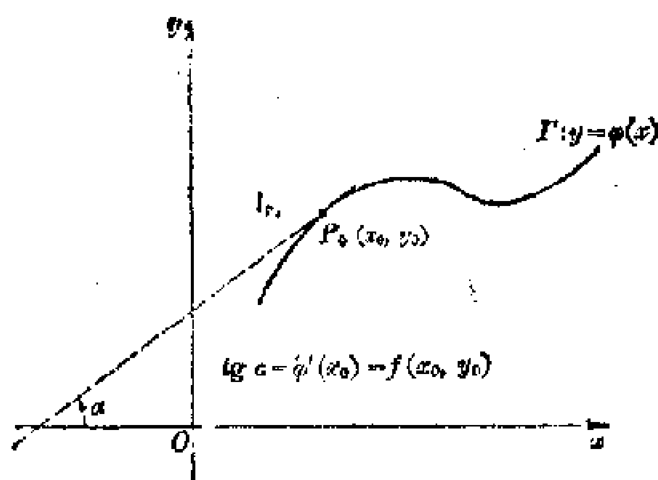


图 3-1

定于 P_0 点的坐标，所以在 P_0 点作积分曲线 Γ 的切线 l_{P_0} 时并不须要预先知道这条积分曲线是什么．因此，我们可以在微分方程(1)的定义区域 D(亦即函数 $f(x, y)$ 的定义区域)内的每一点作出积分曲线(如果存在的话)在该点的切线，尽管我们对积分曲线一无所知．

现在，我们就在区域 D 内，对每一点 $P_0(x_0, y_0)$ 作一短小的直线段 l_{P_0}，使得它的斜率为 $f(x_0, y_0)$．这样，我们就称这个区域 D 联同它在各点的这种小的直线段(叫*线素*)为微分方程(1)的*线素场*．通常，也把上面的直线段 l_{P_0} 取成一个有方向的线段(即向量)，这时相应的线素场叫作*方向场*．因此可以说，方向场也就是有方向的线素场，它们没有本质上的差别．

一般而言，关系式 $f(x, y)=k$ 确定一条曲线 L_k．显然，线素场在曲线 L_k 上各点的线素的斜率都等于 k．我们就称这种曲线 L_k 为线素场的*等斜线*．

从上面的讨论可知，微分方程(1)的任何一条积分曲线在各点的切线应该与线素场在该点的线素相吻合．另一方面，如果在区域 D 内有一条光滑的曲线 Γ^*: $y=\psi(x)$，它在各点

的切线都与线素场在该点的线素吻合，亦即斜率$\psi'(x)$与$f(x,\psi(x))$相等$[\psi'(x)\equiv f(x,\psi(x))]$，那么根据微分方程解的定义就知：$y=\psi(x)$是微分方程(1)的一个解，亦即$\Gamma^*$是微分方程(1)的一条积分曲线.

所以，从几何上看，求微分方程(1)经过$P_0(x_0,y_0)$点的一条积分曲线就是在区域D内求一条经过P_0点的曲线S，使得曲线S在各点都与线素场在该点的线素相切.下面先看几个线素场的例子.

【例题1】 试作微分方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \quad (y\neq 0) \tag{2}$$

的线素场.

在xOy平面上，任取一点$P_0(x_0, y_0)(y_0\neq 0)$，根据上述线素场的作法，我们以微分方程(2)的右端函数在P_0点的函数值——即$\frac{-x_0}{y_0}$为斜率，作一小直线段l_{P_0}. 容易看出，l_{P_0}与向径$\overline{OP_0}$是互相垂直的(注意，$\overline{OP_0}$的斜率是l_{P_0}的斜率的负倒数). 这样一来，我们就可以比较简单地作出微分方程(2)的线素场，如图3-2所示.

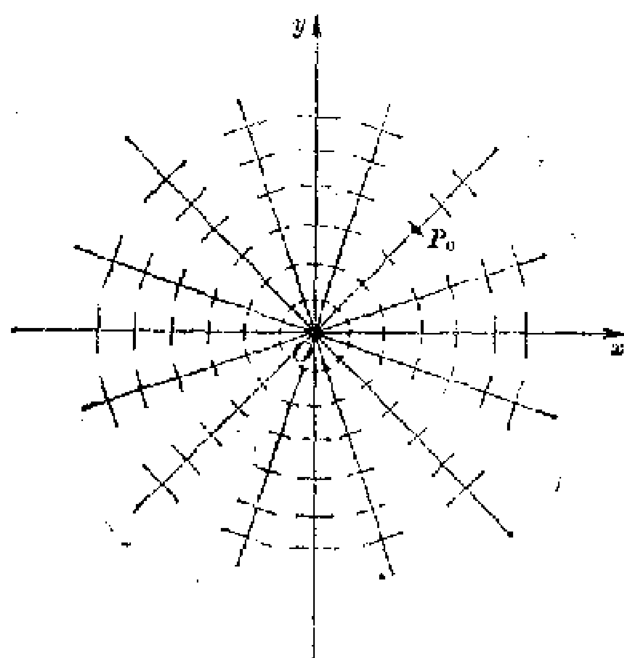


图 3-2

这个线素场的草图大致上显示了微分方程(2)的积分曲线的轮廓. 当然，对于方程(2)，我们可以用初等积分法求出它的积分曲线族为$x^2+y^2=c^2$. 下面再举一个

线素场的例子，关于它的积分曲线我们是不知道的。

【例题 2】 求微分方程

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2 \tag{3}$$

的线素场。

我们先考虑这线素场的等斜线，即

$$L_k:\quad x^2+y^2=k \quad (\text{常数 } k\geqslant 0).$$

这是一族以原点为中心的同心圆。在等斜线 L_k 上线素场的所有线素的斜率都等于 k。例如，在 $L_1(x^2+y^2=1)$ 上各点线素的斜率都等于 1，而在 $x^2+y^2=2^2$ 上各点线素的斜率都等于 4。特别，在原点(对应于 $k=0$)线素的斜率为零。所以，利用这种等斜线可以较快地作出线素场的草图，见图 3-3。这个图形比较粗糙地显示了微分方程(3)的积分曲线的轮廓。

因此，从线素场的几何直观来看，我们容易猜测：只要微

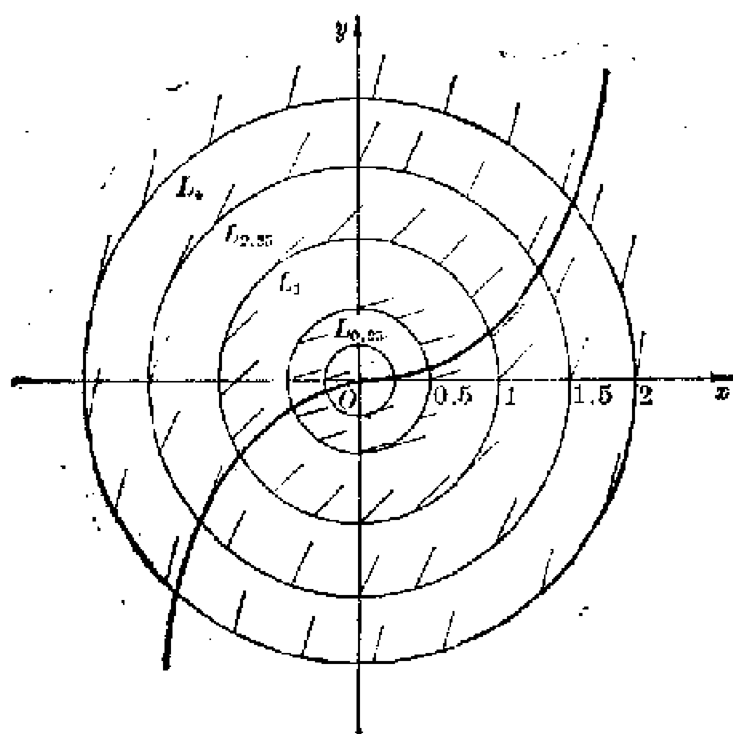


图 3-3

分方程(1)的线素场分布是规则的(例如,斜率$f(x, y)$连续地变化),那么过区域 D 内每一点都会有一条积分曲线经过;即微分方程(1)满足初始条件

$$y(x_0)=y_0 \quad ((x_0, y_0)\in D) \tag{4}$$

的解是存在的.

早在十八世纪,欧拉(Euler)就根据这种几何直观提出一种用折线近似地求解初值问题(1)+(4)的方法——后人称它为欧拉折线法.下面我们对它作一简单的介绍.

在第二章中已经提到一般非线性微分方程初值问题的解只是局部存在的;因此,一般而言,初值问题(1)+(4)的解也只能在初始点$P_0(x_0, y_0)$的附近存在,正如数学分析中的隐函数只能在初始点的附近存在一样.为了简单起见,我们不妨以P_0为中心作一矩形区域

$$R: \quad |x-x_0|\leqslant a, \quad |y-y_0|\leqslant b.$$

取正数a与b适当小,使得$R\subset D$(即R包含在D内),并且只在R内讨论初值问题(1)+(4).

现在,我们在x轴上把区间$|x-x_0|\leqslant a$分成$2n$等分,则每等分的长度为$\delta=\frac{a}{n}$;分点的坐标为

$$x_i=x_0+i\delta \quad (i=0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm n).$$

注意,$x_{-n}=x_0-a$与$x_n=x_0+a$是两个端点(参考图3-4).我们从初始点P_0开始先向右作一条折线如下:在P_0点以$f(x_0, y_0)$为斜率作一直线,使它与直线$x=x_1$相交于点$P_1(x_1, y_1)$;取直线段$\overline{P_0P_1}$作为所作折线的第一段.再在P_1点以$f(x_1, y_1)$为斜率作一直线,使它与直线$x=x_2$相交于点$P_2(x_2, y_2)$;取直线段$\overline{P_1P_2}$作为折线的第二段.如此类推.在一定的条件下,可以在R内得到一条折线$\langle P_0P_1P_2\cdots P_{n-1}P_n\rangle$.

同样，我们从 P_0 开始向左作一条折线 $\langle P_{-n}P_{-n+1}\cdots P_{-2}P_{-1}P_0\rangle$. 然后，把这两条折线联合成一条折线 $\langle P_{-n}P_{-n+1}\cdots P_{-2}P_{-1}P_0P_1P_2\cdots P_{n-1}P_n\rangle$，并且可以把它表达为：

$$\gamma_n:\quad y=\varphi_n(x)\quad (x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a).$$

通常，γ_n 称为欧拉折线，并且它可以看作初值问题(1)+(4)的一个近似解. 的确有许多实际问题可以通过这种近似解得到令人满意的解决.

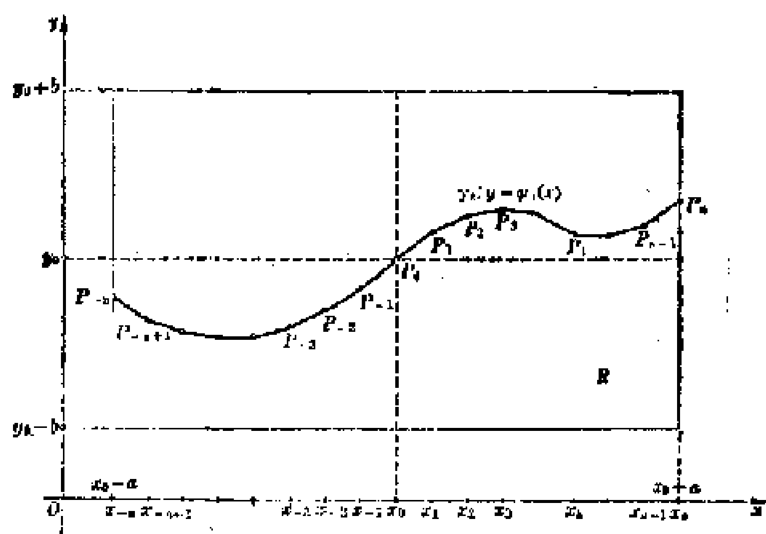


图 3-4

在直观上似乎不难想象，只要 n 愈大，欧拉折线的近似程度就愈高. 这在理论上就须要证明：当 $n\to\infty$ 时，$y=\varphi_n(x)$ 将收敛到初值问题(1)+(4)的真正的解. 但是，一般而言，$y=\varphi_n(x)$ 不一定收敛. 关于这个问题的进一步探讨，有兴趣的读者可以参考王柔怀与伍卓群编的《常微分方程讲义》(人民教育出版社出版). 我们在下一节将介绍另一种求近似解的方法——比卡 (Picard) 逐次逼近法；并且还要讨论它的收敛性. 所以这样做的主要原因是：比卡逐次逼近法在形式上比较简单，而且它在其他数学分支中也有重要的应用.

习 题 3.1

1. 设正数 M 是 $|f(x, y)|$ 在矩形 R ($|x-x_0|\leqslant a$, $|y-y_0|\leqslant b$) 上的一个上界，而且 $a\leqslant\frac{b}{M}$. 试证：欧拉折线 γ_n 坐落在 R 内；也就是说，当 $|x-x_0|\leqslant a$ 时，有 $|\varphi_n(x)-y_0|\leqslant b$.
2. 试作下列微分方程的线素场(草图)：

   (1) $y'=xy$;　　　　(2) $y'=\sin y$.

第二节　比卡逐次逼近法

我们的目的是求微分方程

$$y'=f(x, y) \tag{1}$$

的解 $y=y(x)$，并且要求它满足初始条件

$$y(x_0)=y_0. \tag{2}$$

为了下面讨论方便，设函数 $f(x, y)$ 在矩形区域

$$R: |x-x_0|\leqslant a, \ |y-y_0|\leqslant b$$

上是连续的.

求上述初值问题的解，困难在于方程(1)的右端 $f(x, y)$ 与未知函数 $y=y(x)$ 有关．这样就不能对方程(1)的两端直接对 x 进行积分．但是，我们注意到未知函数 $y=y(x)$ 须要满足初始条件(2)，即当 $x=x_0$ 时，$y=y(x)$ 与 $y=y_0$ 相等．因此，在 $x=x_0$ 附近，直线 $y=y_0$ 可以近似地代替(未知的)积分曲线 $y=y(x)$ (如果它存在的话)．我们称 $y=y_0$ 为初值问题(1)+(2)的*第 0 次近似解*．它在初始点 (x_0, y_0) 与积分曲线 $y=y(x)$ 相交，但不一定相切(相切的条件为积分曲线 $y=y(x)$ 在 (x_0, y_0) 点的切线是水平直线 $y=y_0$，即斜率

$$y'(x_0)=f(x_0, y(x_0))=f(x_0, y_0)$$

必须等于零)．显然，这种近似解是非常粗糙的．问题是如何逐步改进它．

现在我们从第 0 次近似解 $y=y_0$ 出发，把它代入方程(1)的右端，即得$f(x, y_0)$．这样，就得到一个与(1)近似的微分方程

$$y_1'=f(x, y_0).$$

对它可以直接进行积分，得到

$$y_1(x)=\int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx+C.$$

为了使 $y=y_1(x)$作为我们的近似解，自然应该使它满足初始条件(2)，由此就确定 $C=y_0$．从而得到

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx.$$

我们称 $y=y_1(x)$为初值问题(1)+(2)的第 1 次近似解．

当然，第 1 次近似解 $y=y_1(x)$ 与所求的解 $y=y(x)$ 相交于初始点(x_0, y_0)．另外，由于 $y_1'(x_0)=f(x_0, y_0)$和 $y'(x_0)=f(x_0, y(x_0))=f(x_0, y_0)$，所以 $y_1'(x_0)=y'(x_0)$．这就是说，$y=y_1(x)$与 $y=y(x)$不仅在初始点(x_0, y_0)相交，而且相切．

因此，这样求得的第 1 次近似解 $y=y_1(x)$ 比前面所说的第 0 次近似解 $y=y_0$ 更接近于未知函数 $y=y(x)$．这一点将鼓舞我们继续前进．类似于上面从第 0 次近似解 $y=y_0$ 到第 1 次近似解 $y=y_1(x)$的过程，我们再把 $y=y_1(x)$代入方程(1)的右端(如果可以这样代入的话)，得到

$$y_2'=f(x, y_1(x)),$$

对它直接进行积分，并且利用初始条件(2)，得

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))dx.$$

这样我们又从第 1 次近似解 $y=y_1(x)$ 导出第 2 次近似解

$y=y_2(x)$. 一般而言，可以从第 n 次近似解 $y=y_n(x)$ 导出第 $n+1$ 次近似解 $y=y_{n+1}(x)$，即

$$y_{n+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\ y_n(x))dx \tag{3}$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

通常，也称由(3)确定的序列

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \cdots,\ y_n(x),\ \cdots$$

为比卡序列；而称 $y=y_n(x)$ 为第 n 次比卡近似解. 从直观上来看，当 n 愈大时，$y=y_n(x)$ 将愈接近于我们欲求的解 $y=y(x)$.

为了使读者熟悉构造比卡序列的具体过程，现在来计算一个简单的例子.

【例题 1】 试用比卡序列求解初值问题:

$$y'=x+y, \quad y(0)=1. \tag{4}$$

这里，第 0 次比卡近似解为 $y=1$；第 1 次近似解为

$$y_1(x)=1+\int_0^x [x+1]dx=1+x+\frac{1}{2}x^2;$$

第 2 次近似解为

$$y_2(x)=1+\int_0^x \left[x+\left(1+x+\frac{1}{2}x^2\right)\right]dx$$

$$=1+x+x^2+\frac{1}{2\cdot 3}x^3;$$

不难用归纳法推出第 n 次近似解为

$$y_n(x)=-(1+x)+2\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n\right)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

由此取极限，就得

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x)=-(1+x)+2e^x.$$

而且容易直接验证这极限函数 $y=-(1+x)+2e^x$ 就是所求的初值问题(4)的(精确)解.

逐次逼近法不象初等积分法那样受到方程类型的限制，它在原则上适用于各种类型的微分方程. 这是逐次逼近法的优点. 当然它也有缺点，就是方法的步骤是无限的. 不过数学分析(微积分学)既然以极限方法作为自己的特长，那么对于这种无限步骤的运算方法是不应该过于非难的. 问题在于收敛性的证明，也就是说，我们还不知道由(3)作出的比卡序列是否收敛，如果它是收敛的话，也不知道它是否收敛到所求的解. 假如我们能够对上述问题作出肯定的回答，那么在理论上就证明了初值问题(1)+(2)的解的存在性，而且在应用上得到了一种可靠的近似解法.

可是，比卡序列并不总是收敛的. 请看下面的反例.

【例题 2】 设初值问题

$$y'=F(x, y), \quad y(0)=0, \tag{5}$$

其中

$$F(x, y)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=0,\ -\infty<y<\infty;\\ 2x, & \text{当 } 0<x\leqslant 1,\ -\infty<y<0;\\ 2x-\dfrac{4y}{x}, & \text{当 } 0<x\leqslant 1,\ 0\leqslant y<x^2;\\ -2x, & \text{当 } 0<x\leqslant 1,\ x^2\leqslant y<\infty.\end{cases}$$

容易验证，函数 $F(x, y)$ 是连续的.

对于初值问题(5)，第 0 次比卡近似解为 $y=0$；所以第 1 次近似解为

$$y_1(x)=\int_0^x F(x, 0)dx=\int_0^x 2x\,dx=x^2;$$

第 2 次近似解为

$$y_2(x)=\int_0^x F(x, y_1(x))dx=\int_0^x -2x\,dx=-x^2;$$

第3次近似解为

$$y_3(x)=\int_0^x F(x,y_2(x))\,dx=\int_0^x 2x\,dx=x^2;$$

一般地，可以得到第 n 次近似解为

$$y_n(x)=(-1)^{n+1}x^2 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

由此可见，这比卡序列是不收敛的.

另一方面，我们可以直接验证 $y=\frac{1}{3}x^2$ 是初值问题(5)的解(而且也不难证明它是唯一的解，只要注意 $F(x,\ y)$ 关于 y 是递减的). 由此可见，上述所谓的第 n 次近似解

$$y_n(x)=(-1)^{n+1}x^2,$$

当 n 无限增大时，并不愈来愈接近于精确解 $y=\frac{1}{3}x^2$. 这就是说，比卡逐次逼近法对初值问题(5)是无用的.

这个例子告诉我们，为了保证比卡序列是收敛的，对微分方程(即对函数 $f(x,\ y)$)还需要附加比连续性更强的条件.这种条件将在下一节的比卡存在定理中给出.

第三节　比卡存在定理

我们在上一节中讨论了比卡逐次逼近法的主要程序，并且提出了比卡序列的收敛性问题. 现在，我们就来解答这个问题，这也就是要证明通常所说的

比卡存在定理　设微分方程

$$y'=f(x,\ y) \tag{1}$$

和初始条件

$$y(x_0)=y_0. \tag{2}$$

又设函数 $f(x,\ y)$ 在矩形区域 $R(|x-x_0|\leqslant a,\ |y-y_0|\leqslant b)$ 上

连续，而且对 y 适合李氏条件(李普希兹(Lipschitz)条件)：

$$|f(x,\ y_1)-f(x,\ y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|, \tag{3}$$

这里正数 L 叫作李氏常数．令

$$M\geqslant \max_{(x,y)\in R}|f(x,\ y)|,\ \ h=\min\left(a,\ \frac{b}{M}\right),$$

则比卡序列

$$y_{n+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\ y_n(x))dx\quad (y_0(x)=y_0), \tag{4}$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上一致收敛到初值问题(1)＋(2)的解，而且它是唯一的解．

【证明】 这个定理的证明，对初学者来说，是比较复杂的．为了使证明的层次清楚，我们把它分成四个步骤．

第一步：要证比卡序列(4)在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上是有定义的，而且每一个 $y_n(x)$ 都是 x 的连续函数．

显然

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\ y_0)dx \tag{5}$$

在区间 $|x-x_0|\leqslant a$ 上是有意义的，而且它是一个连续的函数．因为微分方程(1)中的函数 $f(x,\ y)$ 只限于在 R 上才有意义，所以应该要求 $y=y_1(x)$ 的图形完全在 R 内，亦即 $|y_1(x)-y_0|\leqslant b$．为了做到这一点，我们特作下述讨论：由(5)推出

$$|y_1(x)-y_0|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(x,\ y_0)|dx\right|\leqslant M\cdot|x-x_0|. \tag{6}$$

当 $|x-x_0|\leqslant a$ 时，一般不能保证 $|y_1(x)-y_0|\leqslant b$．但是，如果再设 $|x-x_0|\leqslant b/M$，则就能从(6)推出 $|y_1(x)-y_0|\leqslant b$．因此，只要取

$$h=\min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

(即 h 等于 a 与 b/M 中的较小者)，就可保证 $y=y_1(x)$ 在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上的图形完全在 R 内(参看示意图 3-5，在图中直线 BD 的斜率为 M，而直线 AC 的斜率为 $-M$，并且设

$$h=\frac{b}{M}$$

小于 a)．因此，当 $|x-x_0|\leqslant h$ 时，可作比卡第 2 次近似解

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))dx. \tag{7}$$

易知 $y=y_2(x)$ 在 $|x-x_0|\leqslant h$ 上是连续的，且由 (7) 推出

$$|y_2(x)-y_0|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(x, y_1(x))|dx\right|$$
$$\leqslant M\cdot|x-x_0|\leqslant b.$$

所以当 $|x-x_0|\leqslant h$ 时，又可作比卡第 3 次近似解，如此类推．可以在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上由 (4) 依次作出比卡序列 $\{y_n(x)\}$．易知 $y_n(x)$ 是连续的，而且 $|y_n(x)-y_0|\leqslant M|x-x_0|\leqslant b$．从这后面的不等式推出 $y=y_n(x)$ 坐落在 R 内，而且它不可能进入图 3-5 中所示的阴影区域内．

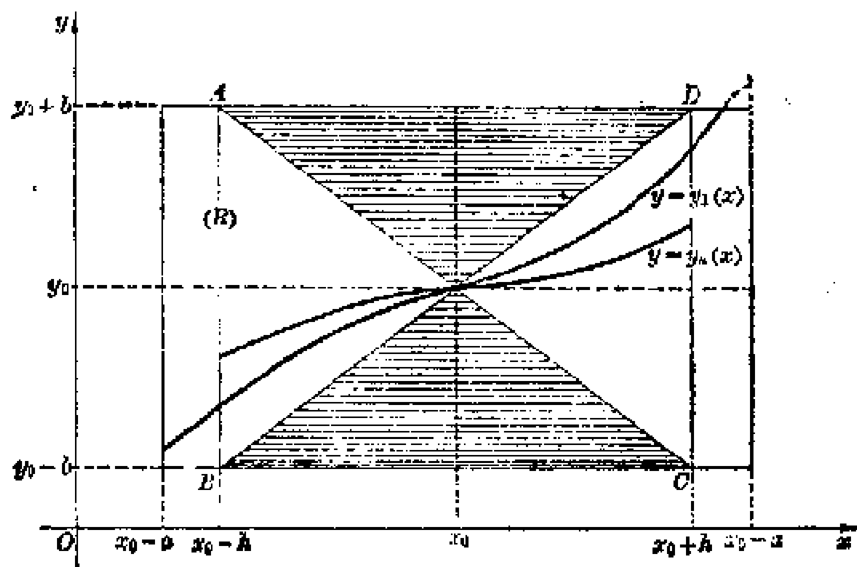


图 3-5

第二步：再证明比卡序列 $\{y_n(x)\}$ 在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上是一致收敛的.

由于序列 $\{y_n(x)\}$ 的收敛性等价于级数

$$y_0(x)+[y_1(x)-y_0(x)]+[y_2(x)-y_1(x)]+\cdots$$
$$+[y_n(x)-y_{n-1}(x)]+\cdots \tag{8}$$

的收敛性，所以只要证明(8)在 $|x-x_0|\leqslant h$ 上的一致收敛性即可. 为此，我们用归纳法来证明级数(8)的一般项 $[y_n(x)-y_{n-1}(x)]$ 满足不等式

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leqslant \frac{M}{L}\cdot\frac{(L|x-x_0|)^n}{n!} \tag{9}$$

$$(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots).$$

事实上，我们已知 $|y_1(x)-y_0|\leqslant M|x-x_0|$，即不等式(9)当 $n=1$ 时成立. 现在，设不等式(9)当 $n=k$ 时成立，则由

$$y_{k+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\ y_k(x))dx$$

和

$$y_k(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\ y_{k-1}(x))dx$$

推出

$$|y_{k+1}(x)-y_k(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}[f(x,\ y_k(x))-f(x,\ y_{k-1}(x))]dx\right|$$

$$\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(x,\ y_k(x))-f(x,\ y_{k-1}(x))|dx\right|$$

（可用李氏条件(3)）

$$\leqslant\left|\int_{x_0}^{x} L|y_k(x)-y_{k-1}(x)|dx\right|$$

（再用归纳法假设）

$$\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}\frac{M}{L}\,\frac{(L|x-x_0|)^k}{k!}\,dx\right|$$

（可算出积分）

$$=\frac{M}{L}\cdot\frac{(L|x-x_0|)^{k+1}}{(k+1)!},$$

即不等式(9)当 $n=k+1$ 时也成立. 因此, 对一切正整数 n, 不等式(9)都成立.

由不等式(9)可见, 当 $|x-x_0|\leqslant h$ 时, 得

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leqslant\frac{M}{L}\cdot\frac{(Lh)^n}{n!},$$

而正项常数级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{L}\frac{(Lh)^n}{n!}$$

是收敛的, 因此由熟知的魏尔斯特拉斯判别法推出: 级数(8), 从而序列 $\{y_n(x)\}$, 在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上是一致收敛的.

既然已经证明了比卡序列 $\{y_n(x)\}$ 一致收敛, 则可令

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}y_n(x)\quad(|x-x_0|\leqslant h).$$

而且 $y=\varphi(x)$ 在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上是连续的. 另外, 又由不等式 $|y_n(x)-y_0|\leqslant M|x-x_0|$ 推出 $|\varphi(x)-y_0|\leqslant M|x-x_0|$. 所以连续曲线 $y=\varphi(x)$ 坐落在 R 内, 而且它也不能进入图 3-5 中所示的阴影区域.

第三步: 要证 $y=\varphi(x)$ 是初值问题 (1)+(2) 在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上的一个解.

由(4)式两边取极限, 得

$$\varphi(x)=y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}f(x,\ y_n(x))dx. \tag{10}$$

现在先证明右边的极限号与积分号可以交换次序; 亦即要证

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}f(x,\ y_n(x))dx=\int_{x_0}^{x}f(x,\ \varphi(x))dx \tag{11}$$

在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上成立.

任给 $\varepsilon>0$, 则根据已经证明的比卡序列 $\{y_n(x)\}$ 的一

致收敛性，可找到正整数 $N=N(\varepsilon)$，使得当 $|x-x_0|\leqslant h$ 时，有不等式

$$|y_n(x)-\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{Lh},\quad 只要\ n\geqslant N.$$

因此

$$\begin{aligned}&\left|\int_{x_0}^{x}f(x,y_n(x))dx-\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi(x))dx\right|\\&\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(x,y_n(x))-f(x,\varphi(x))|dx\right|\\&\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}L|y_n(x)-\varphi(x)|dx\right|\\&\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}L\frac{\varepsilon}{Lh}dx\right|=\frac{\varepsilon}{h}|x-x_0|\leqslant\frac{\varepsilon}{h}h=\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了极限(11)成立，因而(10)式就是

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi(x))dx. \tag{12}$$

由于(12)式的右端关于变上限 x 是可微的，因此它的左端 $\varphi(x)$ 也是 x 的可微函数，而且对 x 求导数就得

$$\varphi'(x)=f(x,\varphi(x))\quad(|x-x_0|\leqslant h).$$

这就证明了 $y=\varphi(x)$ 是微分方程(1)的一个解.

另外，由(12)可见，$\varphi(x_0)=y_0$，亦即 $y=\varphi(x)$ 满足初始条件(2).

因此，$y=\varphi(x)$ 是初值问题(1)+(2)的一个解.

这样，我们就用比卡逐次逼近法证明了初值问题(1)+(2)的解是存在的. 但是，现在并不知道，除了 $y=\varphi(x)$ 之外是否还有另外的解.

第四步：要证初值问题(1)+(2)的解是唯一的.

设 $y=\psi(x)$ $(|x-x_0|\leqslant\beta)$ 也是初值问题(1)+(2)的一个解. 我们只要证明 $\psi(x)=\varphi(x)$ $(|x-x_0|\leqslant\alpha)$ 就行了，其中

$$\alpha=\min(h,\ \beta).$$

因为 $y=\psi(x)$ 是初值问题(1)+(2)的解，即

$$\psi'(x)=f(x,\ \psi(x)),\quad \psi(x_0)=y_0,$$

所以由积分推出

$$\psi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\ \psi(x))dx. \tag{13}$$

把(12)与(13)两式相减，再取绝对值，并利用李氏条件，则得到

$$\left|\psi(x)-\varphi(x)\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(x,\ \psi(x))-f(x,\ \varphi(x))|dx\right|$$

$$\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x} |\psi(x)-\varphi(x)|dx\right|.$$

设 $x\geqslant x_0$，就得不等式

$$|\psi(x)-\varphi(x)| \leqslant L\int_{x_0}^{x} |\psi(x)-\varphi(x)|dx. \tag{14}$$

令

$$v(x)=\int_{x_0}^{x} |\psi(x)-\varphi(x)|dx,$$

则 $v(x)\geqslant 0$，而且 $v'(x)=|\psi(x)-\varphi(x)|$. 因此不等式(14)变成

$$v'(x)-Lv(x)\leqslant 0 \quad (x_0\leqslant x\leqslant x_0+\alpha).$$

用积分因子 e^{-Lx} 乘此不等式，推得

$$\frac{d}{dx}[e^{-Lx}v(x)]\leqslant 0.$$

因此，函数 $e^{-Lx}v(x)$ 在区间 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+\alpha$ 上是递减的，从而有

$$e^{-Lx}v(x)\leqslant e^{-Lx_0}v(x_0) \quad (x_0\leqslant x\leqslant x_0+\alpha).$$

因为 $v(x_0)=0$，所以 $e^{-Lx}v(x)\leqslant 0$，亦即 $v(x)\leqslant 0$. 另一方面，已知 $v(x)\geqslant 0$. 这样一来，就有 $v(x)=0$，即

$$\int_{x_0}^{x} |\psi(x)-\varphi(x)|dx=0 \quad (x_0\leqslant x\leqslant x_0+\alpha).$$

再对 x 求导数，得到

$$|\psi(x)-\varphi(x)|=0 \quad (x_0\leqslant x\leqslant x_0+\alpha).$$

同样可证

$$|\psi(x)-\varphi(x)|=0 \quad (x_0-\alpha\leqslant x\leqslant x_0).$$

所以，当 $|x-x_0|\leqslant\alpha$ 时，有 $\psi(x)=\varphi(x)$.

至此，比卡存在定理得证. ▌

从比卡(存在性和唯一性)定理可得下列推论：

推论 1 设微分方程

$$y'=f(x, y), \tag{15}$$

其中函数 $f(x, y)$ 和它的偏导数 $f'_y(x, y)$ 在(开的)区域 G 内连续，则微分方程(15)经过区域 G 内的任何一点有并且只有一条积分曲线(只就局部范围而言).

事实上，设点 $(x_0, y_0)\in G$, 我们考虑初始条件

$$y(x_0)=y_0, \tag{16}$$

并且以初始点 (x_0, y_0) 为中心在区域 G 内作一矩形区域

$$R_1(|x-x_0|\leqslant\alpha,\ |y-y_0|\leqslant\beta),$$

则 $f(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 在 R_1 上当然也是连续的；从而 $|f'_y(x,y)|$ 在 R_1 上有上界 N. 因此，由中值定理

$$f(x, y_1)-f(x, y_2)=f'_y(x, \eta)(y_1-y_2) \quad ((x, \eta)\in R)$$

推出

$$|f(x, y_1)-f(x, y_2)|\leqslant N|y_1-y_2|,$$

即 $f(x, y)$ 在 R_1 上关于 y 适合李氏条件. 这样，在 R_1 上可以利用比卡关于初值问题(15)+(16)解的存在性和唯一性定理. 由此就可得到在推论 1 中所述的结论了.

根据推论 1, 我们可以对许多微分方程断言在什么样的区域内经过每一点有且只有一条积分曲线. 例如：

1) 微分方程 $y'=x^2+y^2$ 经过 (x, y) 平面上的任何一点

有并且只有一条积分曲线(虽然我们不能用初等积分法求出它们).

2) 微分方程 $y'=\sqrt{y}\quad(0\leqslant y<\infty)$ 对于区域

$$G=\left\{(x,\ y)\mid f'_y=\frac{1}{2\sqrt{y}}\text{ 连续, 即 } y>0\right\}$$

(亦即上半平面)内的任何一点有并且只有一条积分曲线(局部). 但是, 在区域 G 的边界 ∂G(即 x 轴)上的每一点都至少有两条积分曲线经过(参看第二章第一节的例题1及图2-1). 注意, $y=0$ 是微分方程 $y'=\sqrt{y}$ 的一个解, 即 x 轴本身是一条积分曲线, 这条积分曲线是其它积分曲线的包线.

一般地, 设 $y=\varphi_0(x)$ 是微分方程 $y'=f(x,\ y)$ 的一个解, 而且经过积分曲线 $y=\varphi_0(x)$ 上的任何点至少还有另一条积分曲线(即破坏了唯一性), 则称 $y=\varphi_0(x)$ 是一个奇解. 例如 $y=0$ 为微分方程 $y'=\sqrt{y}$ 的奇解.

推论 2 设微分方程(15)满足推论 1 的假设, 但是在 G 的边界 ∂G 上有 $f'_y(x,\ y)=\pm\infty$, 则微分方程(15)如果有奇解的话, 它一定在边界 ∂G 上.

例如, $y'=\sqrt{y}$ 的奇解 $y=0$ 就是如此.

下面我们举例说明, 在推论 2 中的边界 ∂G 上可以没有奇解.

设微分方程

$$y'=F(x,\ y),\tag{17}$$

其中
$$F(x,\ y)=\begin{cases}y\log y, & \text{当 } y>0;\\ 0, & \text{当 } y=0.\end{cases}$$

易知 $G=\{(x,\ y)\mid F'_y(x,\ y)\text{连续}\}$ 就是上半平面($y>0$). 在 G 内可利用推论 1 的结论, 即微分方程(17)过 G 内的每一点有并且只有一条积分曲线(局部).

而在 G 的边界 ∂G, 即 x 轴上, 有 $F'_y(x, 0)=-\infty$, 因此由推论2可知,如果微分方程(17)有奇解的话,这奇解一定是 $y=0$. 易知 $y=0$ 是(17)的一个解.

当 $y>0$ 时,由(17)可用分离变量法求出它的通解为

$$y=e^{ce^x} \quad (c\text{ 是任意常数}),$$

它们都不能与 $y=0$ 相交. 因此,过 x 轴上的任何点,方程(17)只有一条积分曲线($y=0$).

由此可见, $y=0$ 是微分方程(17)在 G 的边界 ∂G 上的一个解,但它并不是奇解.

从上面简单例子的讨论,已经看到,奇解问题是一个比较复杂的问题. 这类问题与古典微分几何中的包络线有关, 在一些早期的微分方程教本中经常用较多的篇幅来讨论奇解. 但是, 许多物理学问题对讨论奇解并不感兴趣, 所以我们对奇解就不作进一步的讨论了.

习 题 3.3

1. 设 $f(x, y)$ 对 y 的偏导数 $f'_y(x, y)$ 在矩形区域 R 上有界,则 $f(x,y)$ 对 y 满足李氏条件.
2. 证明下列函数满足李氏条件(并指出在什么区域):

   (1) $f(x, y)=|y|$; (2) $f(x, y)=\sin(x^2+y^2)$;

   (3) $f(x, y)=|\log y|+x$; (4) $f(x, y)=xy^n \quad (n>0)$.
3. 指明下列微分方程满足解的存在性和唯一性的区域:

   (1) $y'=|y|$; (2) $y'=\sin(x^2+y^2)$;

   (3) $y'=|\log y|+x$; (4) $y'=xy^n \quad \left(n=\frac{1}{3}, 2\right)$;

   (5) $y'+p(x)y=q(x)$, 其中 $p(x)$ 与 $q(x)$ 在 $\alpha<x<\beta$ 上连续.
4*. 设函数 $f(x, y)$ 在 (x, y) 平面上连续,而且满足

   $$|f(x, y)|\leqslant A|y|+B,$$

   其中 A 与 B 是两个正的常数. 又设 $f'_y(x, y)$ 也连续. 试证明微分方

程 $y'=f(x, y)$ 的任何解都在区间 $-\infty<x<\infty$ 上存在(这就是说，这里解的存在区间是全局而不是局部的)。

5. 证明微分方程 $y'=y^{\frac{1}{3}}+1$ 没有奇解。

第四节　解对参数和初值的依赖关系

在这一节中，我们简单地介绍一下微分方程的解对于参数和初值的依赖关系。先讨论两个具体的例子。

【例题 1】　设微分方程

$$\frac{dy}{dx}+2y=\sin\omega x, \tag{1}$$

其中 $\omega(>0)$ 是一个参数(即它是可以变动的常数)。又设初始条件

$$y(0)=0. \tag{2}$$

试讨论初值问题(1)+(2)的解关于参数 ω 的依赖关系。

由于方程(1)是线性的，所以可直接求得初值问题(1)+(2)的解为

$$y=\varphi(x;\ \omega)=\frac{1}{4+\omega^2}[\omega(e^{-2x}-\cos\omega x)+2\sin\omega x].$$

由此可见，$y=\varphi(x;\omega)$ 是 x 和 ω 的连续函数。这就是通常所说的初值问题(1)+(2)的解关于参数 ω 是连续依赖的；而且它关于参数 ω 也是连续可微的。

【例题 2】　设微分方程

$$\frac{dy}{dx}+y=e^x \tag{3}$$

和初始条件

$$y(x_0)=y_0, \tag{4}$$

其中 x_0, y_0 是任意给定的(也可以把 x_0, y_0 看作参数)。试讨

论微分方程(3)的解关于初值 x_0, y_0 的依赖关系.

容易求出初值问题(3)+(4)的解为

$$y=\varphi(x;x_0,y_0)=\frac{1}{2}e^{x}+\left(y_0e^{x_0}-\frac{1}{2}e^{2x_0}\right)e^{-x}.$$

由此可见,初值问题(3)+(4)的解 $y=\varphi(x;x_0,y_0)$是 x, x_0, y_0 的连续函数. 也就是说,微分方程(3)的解关于初值 x_0, y_0 是连续依赖的;而且不难看出,它关于初值 x_0, y_0 也是连续可微的.

以上的讨论只是针对具体的可以求解的微分方程而言,对于一般的微分方程究竟如何呢?下面回答这个问题.

设含参数 λ 的微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y;\lambda), \tag{5}$$

其中函数 $f(x,y;\lambda)$在区域

$$W: |x-x_0|\leqslant a,\quad |y-y_0|\leqslant b;\ |\lambda-\lambda_0|\leqslant\sigma$$

上是连续的. 又设初始条件

$$y(x_0)=y_0. \tag{6}$$

令正数

$$M\geqslant\max_{(x,y;\lambda)\in W}|f(x,y;\lambda)|,\qquad h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right).$$

定理1(解对参数的连续性) 设微分方程(5)的右端 $f(x,y;\lambda)$在区域 W 上关于 y 适合李氏条件

$$|f(x,y_1;\lambda)-f(x,y_2;\lambda)|\leqslant L|y_1-y_2|, \tag{7}$$

其中李氏常数 $L>0$, 则初值问题(5)+(6)的解 $y=\varphi(x;\lambda)$在区域

$$V: |x-x_0|\leqslant h;\quad |\lambda-\lambda_0|\leqslant\sigma$$

上是连续的.

[关于这个定理的证明,请读者自己用比卡逐次逼近法来

完成．这里只给出一点提示：首先证明比卡序列

$$y_{n+1}(x;\lambda)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\ y_n(x;\lambda);\lambda)dx$$

$$(y_0(x;\lambda)=y_0;\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

关于 $(x;\lambda)\in V$ 是连续的．然后再证明这个比卡序列 $\{y_n(x;\lambda)\}$ 关于 $(x;\lambda)\in V$ 也是一致收敛的．]

下面我们考虑初值问题(5)+(6)的解 $y=\varphi(x;\lambda)$ 关于参数 λ 的可微性：

定理 2(解对参数的可微性) 设微分方程(5)的右端函数 $f(x,\ y;\lambda)$ 在区域 W 上对 y 和 λ 有连续偏导数 $f'_y(x,\ y;\lambda)$ 和 $f'_\lambda(x,\ y;\ \lambda)$，则初值问题(5)+(6)的解 $y=\varphi(x;\ \lambda)$ 在区域 V 上是连续可微的．

【证明】 首先我们指出，根据解的定义，$\varphi'_x(x;\lambda)$的存在性是自明的．

现在证明 $\varphi'_x(x;\lambda)$对$(x;\ \lambda)\in V$ 是连续的．

事实上，由于$f'_y(x,\ y;\ \lambda)$在区域 W 上是连续的，所以利用微分中值公式推出

$$\begin{aligned}&|f(x,\ y_1;\lambda)-f(x,\ y_2;\lambda)|\\&\quad=|f'_y(x,\ \hat{y};\lambda)(y_1-y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|,\end{aligned}$$

其中常数 L 是 $|f'_y|$ 在区域 W 上的一个上界．这就是说，$f(x,\ y;\ \lambda)$在区域 W 上关于 y 适合李氏条件(7)．因此，可以用定理 1 的结论推出：初值问题(5)+(6)的解 $y=\varphi(x;\ \lambda)$关于$(x;\lambda)\in V$ 是连续的．从而，再由复合函数的连续性推出 $f(x,\ \varphi(x;\ \lambda);\ \lambda)$对$(x;\ \lambda)\in V$ 是连续的．另一方面，又因 $y=\varphi(x;\lambda)$是(5)的解，即

$$\varphi'_x(x;\lambda)\equiv f(x,\ \varphi(x;\lambda);\lambda).$$

所以由上述 $f(x, \varphi(x;\lambda);\lambda)$ 的连续性可知，$\varphi'_x(x;\lambda)$ 对 $(x;\lambda) \in V$ 是连续的.

其次要证：$\varphi'_\lambda(x;\lambda)$ 在区域 V 上存在而且连续.

为此目的，我们任意取定 $(x;\lambda)\in V$ 和关于 λ 的增量 $\Delta\lambda\neq 0$，并考虑 $\varphi(x;\lambda)$ 关于 λ 的差商，即

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta\lambda}=\frac{\varphi(x;\lambda+\Delta\lambda)-\varphi(x;\lambda)}{\Delta\lambda},$$

这里自然要求 $(x;\lambda)$ 和 $(x;\lambda+\Delta\lambda)\in V$. 我们须要证明：极限

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta\lambda}=\varphi'_\lambda(x;\lambda) \tag{8}$$

存在，而且它对 $(x;\lambda)\in V$ 是连续的.

为了在符号上书写方便，我们令

$$\xi=\Delta\lambda;\quad \psi(x;\lambda;\xi)=\frac{\Delta\varphi}{\Delta\lambda},$$

即
$$\psi(x;\lambda;\xi)=\frac{\varphi(x;\lambda+\xi)-\varphi(x;\lambda)}{\xi}\quad(\xi\neq 0)$$

表示 $\varphi(x;\lambda)$ 关于 λ 的差商. 所以问题又归结为要证明极限

$$\lim_{\xi\to 0}\psi(x;\lambda;\xi)=\varphi'_\lambda(x;\lambda)$$

存在，而且它对 $(x;\lambda)\in V$ 是连续的.

由于 $y=\varphi(x;\lambda)$ 是(5)的解，所以我们有

$$\frac{d}{dx}\varphi(x;\lambda)=f(x,\varphi(x;\lambda);\lambda);$$

$$\frac{d}{dx}\varphi(x;\lambda+\xi)=f(x,\varphi(x;\lambda+\xi);\lambda+\xi).$$

从而得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\,\frac{\varphi(x;\lambda+\xi)-\varphi(x;\lambda)}{\xi}\\
&\quad=\frac{1}{\xi}[f(x,\ \varphi(x;\lambda+\xi);\lambda+\xi)-f(x,\ \varphi(x;\lambda);\lambda)]\\
&\quad=\frac{1}{\xi}[f(x,\varphi(x;\lambda+\xi);\lambda+\xi)-f(x,\varphi(x;\lambda);\lambda+\xi)]\\
&\qquad+\frac{1}{\xi}[f(x,\ \varphi(x;\ \lambda);\ \lambda+\xi)-f(x,\ \varphi(x;\ \lambda);\ \lambda)]\\
&\quad=A(x;\ \lambda;\ \xi)\frac{\varphi(x;\lambda+\xi)-\varphi(x;\lambda)}{\xi}+B(x;\ \lambda;\ \xi),
\end{aligned}
$$

即

$$
\frac{d}{dx}\psi(x;\lambda;\xi)=A(x;\lambda;\xi)\psi(x;\lambda;\xi)+B(x;\lambda;\xi), \tag{9}
$$

其中

$$
A(x;\ \lambda;\ \xi)=\begin{cases}\dfrac{f(x,\varphi(x;\lambda+\xi);\lambda+\xi)-f(x,\varphi(x;\lambda);\lambda+\xi)}{\varphi(x;\lambda+\xi)-\varphi(x;\lambda)},\\ \qquad\text{当 } \varphi(x;\lambda+\xi)\neq\varphi(x;\lambda);\\ f'_y(x,\varphi(x;\lambda);\lambda+\xi),\ \text{当 } \varphi(x;\lambda+\xi)=\varphi(x;\lambda);\end{cases}
$$

$$
B(x;\ \lambda;\ \xi)=\frac{f(x,\varphi(x;\lambda);\lambda+\xi)-f(x,\varphi(x;\lambda);\lambda)}{\xi}.
$$

这里要求 $\xi\neq0$. 但是，由于 $f(x,y;\lambda)$，$f'_y(x,y;\lambda)$，$f'_\lambda(x,y;\lambda)$ 和 $\varphi(x;\lambda)$的连续性，我们不仅推出，当 $\xi\neq0$ 时，$A(x;\ \lambda;\ \xi)$和 $B(x;\lambda;\xi)$是$(x;\lambda;\xi)$的连续函数，且极限

$$
\lim_{\xi\to0}A(x;\ \lambda;\ \xi)=f'_y(x,\ \varphi(x;\ \lambda);\ \lambda),
$$

$$
\lim_{\xi\to0}B(x;\ \lambda;\ \xi)=f'_\lambda(x,\ \varphi(x;\ \lambda);\ \lambda)
$$

存在并对$(x;\lambda)\in V$ 连续. 因此，只要令

$$
A(x;\ \lambda;\ 0)=f'_y(x,\ \varphi(x;\ \lambda);\ \lambda),
$$

$$
B(x;\ \lambda;\ 0)=f'_\lambda(x,\ \varphi(x;\ \lambda);\ \lambda),
$$

那么当 $\xi=0$ 时，$A(x;\lambda;\xi)$和 $B(x;\lambda;\xi)$也是连续的. 下面我

们就把(9)中的 $A(x;\lambda;\xi)$ 和 $B(x;\lambda;\xi)$ 看作已经按上述方式连续扩充到 $\xi=0$(注意，对于 $\psi(x;\lambda;\xi)$，我们还不知道它能否连续扩充到 $\xi=0$. 这也正是在下面须要解决的一个问题.)

另一方面，由于 $y=\varphi(x;\lambda)$ 满足初值条件(6)，所以有

$$\psi(x_0;\lambda;\xi)=\frac{\varphi(x_0;\lambda+\xi)-\varphi(x_0;\lambda)}{\xi}=\frac{y_0-y_0}{\xi}=0,$$

即 $\psi(x;\lambda;\xi)$ 满足初值

$$\psi(x_0;\lambda;\xi)=0. \tag{10}$$

因为(9)是一个关于 $\psi(x;\lambda;\xi)$ 的一阶线性微分方程，所以再利用(10)，就可直接解得

$$\psi(x;\lambda;\xi)=e^{\int_{x_0}^{x}A(t;\lambda;\xi)dt}\int_{x_0}^{x}e^{-\int_{x_0}^{s}A(t;\lambda;\xi)dt}\cdot B(s;\lambda;\xi)ds, \tag{11}$$

其中 x 是积分上限，λ 和 ξ $(\neq 0)$ 是参变数.

由于 $A(x;\lambda;\xi)$ 和 $B(x;\lambda;\xi)$ 关于 $(x;\lambda;\xi)$ 是连续的(包括 $\xi=0$)，所以根据关于含参变数的(变上限)积分理论，我们看到(11)的右边积分对 $(x;\lambda;\xi)$)是连续的(包括 $\xi=0$)，从而当 $\xi\to 0$ 时，(11)的左边(即 $\psi(x;\lambda;\xi)$)的极限存在，亦即极限

$$\lim_{\xi\to 0}\psi(x;\lambda;\xi)=\varphi'_\lambda(x;\lambda)$$

存在；而且由(11)，得

$$\varphi'_\lambda(x;\lambda)=e^{\int_{x_0}^{x}A(t;\lambda;0)dt}\int_{x_0}^{x}e^{-\int_{x_0}^{s}A(t;\lambda;0)dt}\cdot B(s;\lambda;0)ds.$$

又由于 $A(x;\lambda;0)$ 和 $B(x;\lambda;0)$ 的连续性，可见 $\varphi'_\lambda(x;\lambda)$ 对 $(x;\lambda)\in V$ 是连续的. 定理 2 得证. ▌

最后，我们来研究微分方程的解对于初值的依赖性.

设微分方程

$$y' = f(x, y), \tag{12}$$

其中函数 $f(x, y)$ 在区域

$$R: |x - x_0| \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant b$$

上连续，而且关于 y 适合李氏条件．我们令正数

$$M \geqslant \max_{(x, y) \in R} |f(x, y)|, \qquad h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right);$$

又设初始条件

$$y(x_0) = \eta, \tag{13}$$

其中可以变动的初值 η 满足

$$|\eta - y_0| \leqslant \frac{b}{2}. \tag{14}$$

因此，只要 $|y - \eta| \leqslant \frac{b}{2}$，就有

$$|y - y_0| \leqslant |y - \eta| + |\eta - y_0| \leqslant \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b.$$

亦即矩形区域

$$R_0: \ |x - x_0| \leqslant a, \ |y - \eta| \leqslant \frac{b}{2}$$

在 R 内．这样，$f(x, y)$ 在 R_0 上自然连续而且适合李氏条件．从而在 R_0 上可以利用上一节的比卡存在定理推出：初值问题 (12)＋(13)的解 $y = \varphi(x; \eta)$ 在区间 $|x - x_0| \leqslant h_1$ 上存在，其中

$$h_1 = \min\left(a, \frac{b}{2M}\right) \leqslant \frac{h}{2}.$$

令 $\qquad z = \varphi(x; \eta) - \eta \quad (\text{即 } z = y - \eta),$

则 z 满足

$$\frac{dz}{dx} = f(x, z + \eta) \tag{15}$$

和

$$z(x_0) = 0. \tag{16}$$

显然，函数 $f(x, z + \eta)$ 在区域

$$W_1: |x-x_0|\leqslant a,\ |z|\leqslant\frac{b}{2};\ |\eta|\leqslant\frac{b}{2}$$

上连续，而且关于 z 适合李氏条件. 只要对初值问题(15)+(16)的解 $z=\psi(x;\ \eta)$ 分别利用定理1和定理2的结论，就可证明下述两个定理(注意，这里的 η 相当于那里的参数 λ).

定理3(解对初值 η 的连续性) 设函数 $f(x, y)$ 在区域 R 上连续而且关于 y 适合李氏条件，则初值问题(12)+(13)的解 $y=\varphi(x;\eta)$ 在区域

$$V_1: |x-x_0|\leqslant h_1;\ |\eta-y_0|\leqslant\frac{b}{2}$$

上是连续的.

定理4(解对初值 η 的可微性) 设函数 $f(x,y)$ 在区域 R 上连续而且对 y 有连续的偏导数 $f'_y(x, y)$，则初值问题(12)+(13)的解 $y=\varphi(x;\eta)$ 在区域 V_1 上是连续可微的.

习 题 3·4*

1. 写出定理1到定理4的详细证明过程.
2. 讨论初值问题

$$y'=f(x, y),\quad y(\xi)=\eta$$

的解 $y=\varphi(x;\xi,\eta)$ 关于初值 (ξ,η) 的依赖性.

3. 在定理4中，求证 $z=\varphi'_\eta(x;\eta)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=f'_y(x, \varphi(x;\eta))z,\\ z(x_0)=1.\end{cases}$$

第三章小结

学习常微分方程只限于初等积分法是不够的. 本章关于解的存在性和唯一性定理，以及解对参数(或初值)的连续性

和可微性定理是常微分方程的理论基础．在这一章中所用的数学知识涉及数学分析中比较理论的一部分，对于不少读者会有一定的难度，如果能够克服其中的困难，那么肯定会得到较大的提高；如果不能花较多的时间，那么只要联系具体的例子能够正确地叙述并且理解本章中所述的几个定理也就行了．

本章的基本要求是：

1．会利用等斜线作线素场的草图；而且会作欧拉折线．

2．会构造比卡序列(求比卡近似解)．

3．能够叙述本章的各个定理．

对数学有较大兴趣的读者则应该掌握本章各个定理的证明．

第四章

二阶微分方程式

在前几章中，我们讲的主要内容是关于一阶微分方程式的几个初等解法和解的存在性与唯一性问题．在实际的应用中，大多数微分方程都是高阶的．本章要讨论几类特殊而又有重要应用的二阶微分方程式的解法和一些有关的理论．

第一节　降阶法

对于高阶微分方程，假如我们能够设法降低它的阶数，那么问题就转变成求解一个阶数较低的微分方程了．在这个意义上讲，我们是前进了一步．有时还可以继续前进，直到完全解决问题．这就是降阶法的主要思想．

不失降阶法的精神实质，我们只对二阶微分方程式介绍两个常用的降阶法．

1.1　右端只含未知函数的二阶微分方程式

$$y''=F(y)\quad \left({}'\text{ 表示 }\frac{d}{dx}\right),\tag{1}$$

其中 $F(y)$ 是连续函数．对于这类二阶微分方程式，我们可以用降阶法求它的通积分．

用 y' 乘方程(1)的两端，即得

$$y'y''=F(y)y'.$$

而这个方程的两端都可以写成完全导数的形式：

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}(y')^2\right]=\frac{d}{dx}\int_{y_0}^{y}F(y)dy.$$

因此，可以直接积分此等式，得到一个"第一积分"[注]

$$\frac{1}{2}(y')^2=\int_{y_0}^{y}F(y)dy+\frac{C_1}{2}, \tag{2}$$

其中 C_1 是任意常数. 令

$$\int_{y_0}^{y}F(y)dy=\frac{1}{2}G(y),$$

则由第一积分(2)解出

$$y'=\pm\sqrt{C_1+G(y)}. \tag{3}$$

对于任意固定的 C_1，方程(3)是一个一阶的微分方程式，它的阶数比原方程(1)降低了一阶. 而且，微分方程(3)还是一个变量分离的方程. 因此可以继续求解，最后求得微分方程(1)的通积分为

$$\int\frac{dy}{\sqrt{C_1+G(y)}}=\pm x+C_2, \tag{4}$$

其中 C_1 与 C_2 是两个任意常数. 最后我们需要指出，上面的讨论只是这个解法的主要步骤，有些细节请读者自己留心，例如对 $\sqrt{C_1+G(y)}=0$ 的情况如何考虑?

【例题 1】 求解弹簧自由振动的规律.

所谓弹簧自由振动，指的是假定弹簧不受阻力的作用；亦即在第一章的第一节中，弹簧振动方程的阻尼常数 $r=0$. 因此，弹簧自由振动的方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0, \tag{5}$$

其中 m 和 k 是正的常数. 这个微分方程的类型是属于(1)的那种类型. 因此可以采用上述降阶法求解.

[注] 关于第一积分的确切定义见第九章.

用 $\dfrac{dx}{dt}$ 乘方程(5)的两端，即得

$$m\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+kx\frac{dx}{dt}=0,$$

或

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}kx^2\right]=0.$$

所以得到第一积分

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}kx^2=C. \tag{6}$$

公式(6)有明显的物理意义：等式左边的第一项

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}mv^2$$

是弹簧振子的动能，而第二项 $\dfrac{1}{2}kx^2$ 则代表位能，它们的和则保持常量 C. 这就表明弹簧自由振动的总能量是守恒的.

由(6)可见，$C\geqslant 0$. 因此不妨设 $C=\dfrac{1}{2}C_1^2$，再由(6)解出

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\pm 1}{\sqrt{m}}\sqrt{C_1^2-kx^2}\quad(\text{设 } C_1\neq 0),$$

亦即

$$\frac{d\left(\dfrac{\sqrt{k}}{C_1}x\right)}{\pm\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{k}}{C_1}x\right)^2}}=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}dt.$$

由此积分得到微分方程(5)的通积分

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{k}\,x}{C_1}\right)=\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+C_2.$$

从而求得通解

$$x=\frac{C_1}{\sqrt{k}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+C_2\right). \tag{7}$$

为了进行物理解说，在通解(7)中，令

$$A=\frac{C_1}{\sqrt{k}},\quad \theta=C_2,\quad \sqrt{\frac{k}{m}}=\omega.$$

注意 $\omega>0$ 是固定的常数，而 A 与 θ 是任意常数。由于 C_2 是任意的，所以在(7)中不妨设 $C_1>0$，即 $A>0$。这样，我们就可以把通解(7)重写如下：

$$x=A\cos(\omega t+\theta). \tag{8}$$

它的图形见图 4-1.

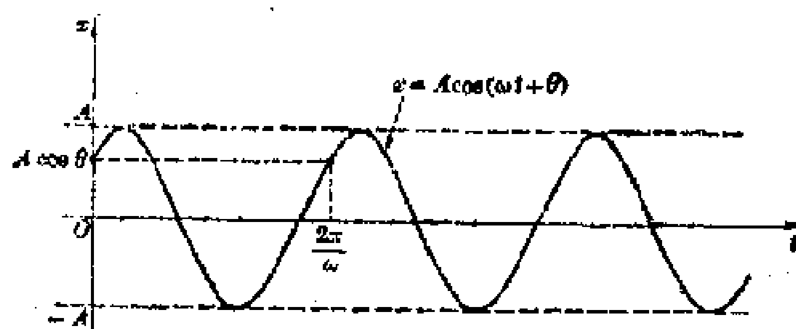


图 4-1

常数 A 通常叫作弹簧振动的振幅，而 θ 叫作初位相。我们容易利用初始条件

$$x(0)=x_0,\quad x'(0)=v_0 \tag{9}$$

确定

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2},$$

$$\theta=-\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{v_0}{\omega x_0}\right).$$

由此可见振幅 A 和初位相 θ 跟初始条件(9)的关系。例如，初位移 x_0 或初速度 v_0 愈大，则振幅 A 愈大。这是完全符合物理直观的。

另一方面，我们从公式(8)看到，弹簧的自由振动是周期运动，它的周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，而频率为 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$。周期 T 与频

率 ω 跟初始条件(9)无关，这一点在物理直观上似乎不甚显然。但是，读者可以自己动手做一个实验来证实周期 T 不依赖于初始条件(或振幅 A 与初位相 θ)；只有在非常精确的测量下，我们才能发现弹簧振动的周期也与初始条件有关。这就表明我们对弹簧的自由振动所建立的初值问题(5)+(9)不能非常精确地反映实际问题，这里主要的根源在于所用到的虎克定律"恢复力 $f_1=-kx$"只是一次(即线性)的近似。如果改进虎克定律的近似程度，例如取 $f_1=-kx+\alpha x^3$(非线性)，那么可以证明弹簧的振动周期确实与初始条件有关。当然，这时在数学上就变得困难多了。

1.2 右端不显含自变量的二阶微分方程式

$$y''=F(y,\ y')\quad \left('\text{表示}\ \frac{d}{dx}\right),\tag{10}$$

其中 $F(y,\ y')$ 是二元连续函数。对于这类微分方程式，我们至少可以把它降一阶。

令 $y'=p$，则

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}.$$

因此，原方程(10)降为一个一阶的微分方程式

$$p\frac{dp}{dy}=F(y,\ p),\tag{11}$$

其中 y 作为自变量，而 p 作为未知函数。假如我们可以求得一阶微分方程式(11)的通解 $p=G(y,\ C_1)$，即

$$y'=G(y,\ C_1),$$

这是变量分离的方程，因此我们得到方程(10)的通积分

$$\int\frac{dy}{G(y,\ C_1)}=x+C_2.\tag{12}$$

【例题 2】 求解弹簧的振动方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-r\frac{dx}{dt}-kx \tag{13}$$

(见第一章的第一节)，或

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+r\frac{dx}{dt}+kx=0.$$

这二阶微分方程式不显含自变量 t，因此它属于方程(10)的那种类型，我们可以对它降阶. 为此，令

$$\frac{dx}{dt}=p,$$

则有
$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dp}{dt}=\frac{dp}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=p\frac{dp}{dx}.$$

从而方程(13)变成

$$mp\frac{dp}{dx}=-rp-kx.$$

这是一个一阶的齐次微分方程

$$\frac{dp}{dx}=-\frac{rp+kx}{mp}. \tag{14}$$

利用在第二章中所讲的齐次微分方程的解法，不难求得(14)的通积分为

$$\log(mp^2+rpx+kx^2)$$
$$-\frac{2r}{\sqrt{4mk-r^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2mp+rx}{\sqrt{4mk-r^2}\cdot x}\right)=C_1.$$

当 $r\neq 0$ 时，难以由此解出 $p=G(x, C_1)$. 所以不能用降阶法最后求得原方程(13)的通积分(或通解). 不过，在后面第四节有很简单的代数方法可以求得微分方程(13)的通解.

【例题 3】 追线：设在 xOy 平面上，有某物 P 从原点 O 出发，以常速 $a>0$ 沿 x 轴正向运动. 同时，又有某物 Q 以常速 b 从点(0, 1)出发去追赶 P. 设 $b>a$，且 Q 的运动方向永

远指向 P. 试求 Q 的运动轨迹以及追上 P 所需的时间(见图 4-2).

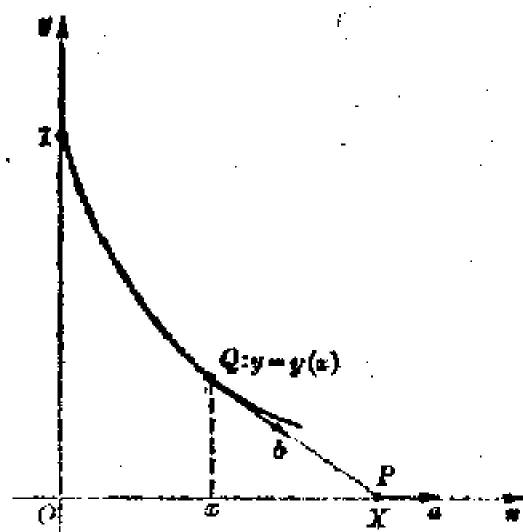


图 4-2

设 Q 的运动坐标为 $x=\varphi(t)$ 与 $y=\psi(t)$, 而轨迹方程为 $y=y(x)$. 则 Q 的速度向量为 $v=\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$, 而且

$$b=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}.$$

因此, 我们有

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{b}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{15}$$

又设 P 的运动坐标为 X, 则 $X=at$, 而且

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{X-x}.$$

从而

$$at-x=-\frac{y}{\frac{dy}{dx}}.$$

再对 x 求导数, 得到

$$a\frac{dt}{dx}-1=-1+\frac{y}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}. \tag{16}$$

由(15)和(16), 我们得到一个二阶的微分方程式

$$y''=\frac{a(y')^2\sqrt{1+(y')^2}}{by} \tag{17}$$

根据题意, 应该有初始条件

$$y(0)=1, \qquad \frac{1}{y'(0)}=0. \tag{18}$$

所以，问题就是要求出微分方程 (17) 满足条件 (18) 的解. 我们注意到(17)是属于微分方程(10)的那种类型.

令 $y'=p$, 则 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$. 因此由(17)推出

$$p\frac{dp}{dy}=\frac{ap^2\sqrt{1+p^2}}{by}.$$

这是变量分离的方程, 于是得

$$\frac{dp}{p\sqrt{1+p^2}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{dy}{y}. \tag{19}$$

由图 4-2 可见 $p=y'(x)<0$, 所以

$$\frac{dp}{p\sqrt{1+p^2}}=\frac{dp}{-p^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{p}\right)^2}}=\frac{d\left(\frac{1}{p}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{p}\right)^2}}.$$

从而由(19)得到

$$\frac{d\left(\frac{1}{p}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{p}\right)^2}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{dy}{y}.$$

对两边取不定积分, 就有

$$\log\left(\frac{1}{p}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{p}\right)^2}\right)=\frac{a}{b}\log y+\log C_1,$$

其中 $C_1(>0)$是任意常数. 由此可得

$$\frac{1}{p}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{p}\right)^2}=C_1y^{\frac{a}{b}}. \tag{20}$$

由(20)推出

$$\frac{1}{p}-\sqrt{1+\left(\frac{1}{p}\right)^2}=\frac{-1}{C_1y^{\frac{a}{b}}}. \tag{21}$$

再把(20)和(21)的两端分别相加, 得

$$\frac{2}{p}=C_1y^{\frac{a}{b}}-\frac{1}{C_1}\ y^{-\frac{a}{b}}. \tag{22}$$

利用条件(18),由(22)得到

$$0=C_1-\frac{1}{C_1},$$

或 $C_1^2=1$. 由于 $C_1>0$, 所以 $C_1=1$, 而(22)变为

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{2}(y^{\frac{a}{b}}-y^{-\frac{a}{b}}),$$

或

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2}(y^{\frac{a}{b}}-y^{-\frac{a}{b}}). \tag{23}$$

对方程(23)的两端取不定积分,就得

$$x+C_2=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+a}\,y^{\frac{b+a}{b}}-\frac{b}{b-a}\,y^{\frac{b-a}{b}}\right), \tag{24}$$

这里 C_2 是任意常数.因为当 $x=0$ 时有 $y=1$, 所以由(24)得

$$C_2=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+a}-\frac{b}{b-a}\right)=\frac{-ab}{b^2-a^2},$$

从而得到

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+a}\,y^{\frac{b+a}{b}}-\frac{b}{b-a}\,y^{\frac{b-a}{b}}\right)+\frac{ab}{b^2-a^2}. \tag{25}$$

这就是 Q 的运动轨迹方程. 我们知道, 当 Q 追上 P 时, 应该有 $y=0$. 因此由(25)推出,当 Q 追上 P 时,就有

$$x=\bar{x}=\frac{ab}{b^2-a^2}.$$

由于 P 以常速 a 运动,所以 Q 追上 P 所需的时间为

$$T=\bar{x}/a=\frac{b}{b^2-a^2}.$$

习 题 4·1

1. 利用降阶法求解下列方程:

(1) $\frac{d^2y}{dx^2}+3y=0$;　　(2) $\frac{d^2y}{dx^2}-3y=0$;

(3) $\frac{d^2x}{dt^2}+x-x^3=0$;　　(4) $y''=\sqrt{1+(y')^2}$;

(5) $yy''-(y')^2=y^2\log y$;　　(6) $2(2a-y)y''=1+(y')^2$;

(7) $x^2yy''=(y-xy')^2$. [提示: 令 $y=e^{\int z dx}$.]

2. 求证曲率半径等于常数的曲线是圆周.

第二节　微分方程的线性化

为了说明微分方程的"线性化方法"的实际应用，现在讨论单摆的振动问题.

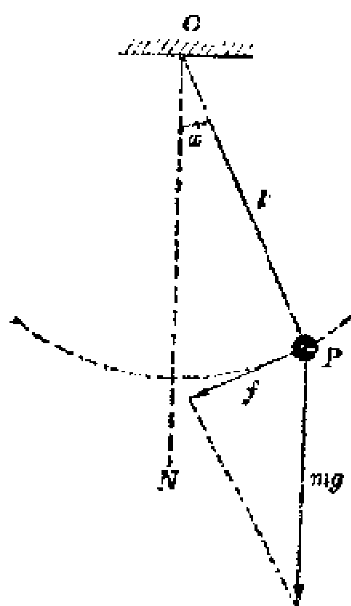


图 4-3

取一根长度为 l 的细线 $\overline{CP}$,把端点 C 固定在一顶板上，而在另一端挂上一个质量为 m 的小球. 这样就构成一个单摆(见图 4-3).

设直线 $\overline{CP}$ 与垂线 $\overline{CN}$ 的夹角为 x, 并设逆时针方向为正，则单摆的振动可以用弧度 $x=x(t)$ 来描述. 单摆振动时，P 端只能在一圆周上运动，而且它的角速度为 $\frac{dx}{dt}$; 切线速度为 $l\frac{dx}{dt}$, 因此沿切线方向的动量为 $ml\frac{dx}{dt}$. 另一方面，若不计空气的阻力，则沿切线方向的外力只有重力 mg 在这切线方向的分量 $f=-mg\sin x$, 这里负号的力学意义是: f 与 x 的方向总是相反的(当 $|x|<\pi$ 时)，即 f 与 $\sin x$ 异号. 由牛顿的第二运动定律推出

$$\frac{d}{dt}\left(ml\frac{dx}{dt}\right)=-mg\sin x. \tag{1}$$

消去 m，移项后，得

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2\sin x=0, \tag{2}$$

其中 $\omega=\sqrt{(g/l)}$. 方程(1)或(2)就是描述单摆振动的微分方程. 利用上一节的降阶法，容易求出微分方程(2)的通积分为

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{C_1+\omega^2\cos x}}=\pm t+C_2. \tag{3}$$

这里左边的积分是一个椭圆积分，它不属于初等函数类. 因此，很难由(3)来显式地确定单摆的振动规律 $x=x(t)$.

但是，当单摆作小振动时$\left(\text{通常只要求 } |x|<\frac{\pi}{6}\right)$，我们可以用线性函数 $y=x$ 去近似地替代方程(2)中的非线性函数 $y=\sin x$（或者说，只取 $\sin x$ 在 $x=0$ 处的泰勒(Taylor)公式

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots$$

中的一次(线性)项 x)，则非线性微分方程(2)就近似地用一个线性微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \tag{4}$$

来替代. 对于方程(4)，我们可以用上一节中例题1的方法求出它的通解为

$$x=A\cos(\omega t+\theta), \tag{5}$$

其中常数 $A>0$ 表示单摆的振幅，θ 代表初位相；它们依赖于单摆的初始条件：

$$x(0)=\alpha,\quad x'(0)=\beta. \tag{6}$$

由(5)可见，单摆将作周期振动，而且周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{7}$$

公式(7)表明，单摆振动的周期只与单摆的长度 l 和重力加速度 g 有关，而与初始条件(6)无关．这叫作单摆振动的"等时性"．老式的摆钟就是利用了这种"等时性"．在夏天摆长因热胀而变长，因此摆钟在夏天就会走得慢一些，而冬天就走得快些．另外，我们还可以利用公式(7)来测量当地的重力加速度 $g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$．

这些结论都是从单摆的线性方化程(4)作出的．实践告诉我们，这些结论反映了单摆振动的主要特征，是令人满意的．例如，我们可以用公式(7)来计算单摆振动的周期 T，也可以自己动手做一个同样长度的单摆，并且测得它的振动周期 T_1，结果发现 T_1 与 T 是非常接近的．

从这个例子我们可以初步体会到微分方程"线性化方法"的意义．当然，如果要进一步研究单摆振动的"不等时性"，那么上述"线性化方法"就不适用了．

在许多实际的应用中，我们碰到的微分方程式

$$y''=f(x, y, y') \tag{8}$$

是非线性的，即 $f(x, y, y')$ 关于变元 y 和 y' 是非线性的函数．往往由于计算上的困难，我们须要先对方程(8)进行线性化，即：把 $f(x, y, y')$ 关于 $y-\bar{y}_0$ 和 $y'-\bar{y}'_0$ 展开成泰勒公式

$$f(x, y, y')=f(x, \bar{y}_0, \bar{y}'_0)+f_1(x, \bar{y}_0, \bar{y}'_0)(y-\bar{y}_0)$$
$$+f_2(x, \bar{y}_0, \bar{y}'_0)(y'-\bar{y}'_0)+\cdots,$$

然后略去 $(y-\bar{y}_0)$ 和 $(y'-\bar{y}'_0)$ 的高次项；这样，就可得到一个与方程(8)近似的微分方程

$$y''=f(x, \bar{y}_0, \bar{y}'_0)+f_1(x, \bar{y}_0, \bar{y}'_0)(y-\bar{y}_0)$$
$$+f_2(x, \bar{y}_0, \bar{y}'_0)(y'-\bar{y}'_0),$$

可以简单地把它写成标准形式

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x), \tag{9}$$

其中 $p(x)$, $q(x)$ 和 $f(x)$ 是在区间 I 上的已知连续函数. 微分方程(9)的主要特征是: 对于 y, y' 和 y'' 都是线性(即一次)的. 我们称这样的微分方程为*线性微分方程*.

对于线性微分方程(9), 如果 $f(x)\not\equiv 0$, 则称它为*非齐次的*; 如果 $f(x)\equiv 0$, 即得

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0, \tag{10}$$

则称线性微分方程(10)为*齐次的*.

对于微分方程(9)或(10), 我们考虑初始条件

$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y_0' \quad (x_0\in I). \tag{11}$$

利用第三章的比卡逐次逼近法, 读者可以证明下面的结论:

定理 初值问题(9)+(11)[包括(10)+(11)]在区间 I 上有并且只有一个解 $y=y(x)$.

对于非数学专业的读者也可不必深究这个定理的证明, 只要能够联系实例(例如单摆)去想象所述初值问题的力学意义也就够了. 因为对于一些有实际意义的初值问题, 解的存在性和唯一性总是非常明显的.

以下几节将要分析微分方程(10)和(9)的通解, 并且在某些特殊情况下, 求出相应的通解.

习 题 4·2

1. 证明二阶线性微分方程(9)在下述变换下保持线性的形式不变:
   (1) 作自变量的变换 $x=g(t)$, 其中 t 是新的自变量, 函数 $g(t)$ 有二阶的连续导数, 且 $g'(t)\neq 0$;
   (2) 作未知函数的变换 $y=u(x)z$, 其中 z 是新的未知函数, 而 $u(x)$ 是一个已知的二次连续可微的函数, 且 $u(x)\neq 0$.
2. 试作一个未知函数的变换 $y=u(x)z$, 使得线性齐次微分方程(10)化成如下形式: $z''+Q(x)z=0$.

3. 试把线性齐次方程(10)化成如下共轭的形式：

$$\frac{d}{dx}\left[F(x)\frac{dy}{dx}\right]+G(x)y=0 \quad (F(x)\neq 0).$$

第三节 齐次线性微分方程式

我们现在来研究齐次线性微分方程式

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0, \tag{1}$$

其中函数 $p(x)$ 与 $q(x)$ 在区间 I 上连续．一般而言，不能用初等方法求方程(1)的通解．在这一节中，我们将在理论上弄清微分方程(1)的通解的结构．这对今后介绍的求解法具有指导性的意义．

令集合 S 由齐次线性微分方程(1)的所有的解组成，即：

$$S=\{y(x)\,|\,y=y(x)\text{是}(1)\text{的解}, x\in I\}.$$

由于 $y=0$(作为 x 的函数，$x\in I$) 是(1)的解，即 $0\in S$．因此，集合 S 不空．

引理 1 设 $y_1(x)$和 $y_2(x)\in S$；又令 c_1 和 c_2 是两个任意的常数．则 $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)\in S$．(这个引理是说齐次线性微分方程满足迭加原理，即：方程(1)的两个解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 的线性组合 $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ 仍是方程(1)的解.)

【证明】 因为 $y_1(x)$和 $y_2(x)\in S$，所以得

$$y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1=0,$$

$$y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2=0.$$

再用常数 c_1 和 c_2 分别乘上面两式，得到

$$(c_1y_1)''+p(x)(c_1y_1)'+q(x)(c_1y_1)=0,$$

$$(c_2y_2)''+p(x)(c_2y_2)'+q(x)(c_2y_2)=0.$$

将这两式相加，就有

$$(c_1y_1+c_2y_2)''+p(x)(c_1y_1+c_2y_2)'$$
$$+q(x)(c_1y_1+c_2y_2)=0,$$
即 $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ 是(1)的解，亦即
$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)\in S. \quad \blacksquare$$

引理1相当于说，集合 S 是一个线性空间. 请注意，这线性空间 S 的元素是方程(1)的解，因此也是在区间 I 上的函数. 为了研究线性空间 S 的结构，须要引进函数的线性相关和线性无关的概念.

定义1 设在区间 I 上给定 m 个函数
$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \cdots,\ \varphi_m(x), \tag{2}$$
若存在 m 个不全为0的常数 $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_m$，使得对于一切的 $x\in I$，都有
$$c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots+c_m\varphi_m(x)=0,$$
则称函数组(2)是线性相关的；否则，称函数组(2)是线性无关的.

例如，对于函数组
$$1,\ \cos^2 x,\ \sin^2 x \quad (-\infty<x<\infty) \tag{3}$$
可以取常数 $c_1=-1,\ c_2=1,\ c_3=1$，使得
$$c_1\cdot 1+c_2\cdot\cos^2 x+c_3\cdot\sin^2 x=0 \quad (-\infty<x<\infty).$$
因此，函数组(3)是线性相关的.

又如，对于函数组
$$1,\ \cos x,\ \sin x \quad (-\infty<x<\infty) \tag{4}$$
如果有
$$c_1\cdot 1+c_2\cdot\cos x+c_3\cdot\sin x=0 \quad (-\infty<x<\infty),$$
则分别令 $x=0$、$\frac{\pi}{2}$、π，就得到一个联立方程

$$\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ c_1+c_3=0 \\ c_1-c_2=0. \end{cases}$$

由此容易解出 $c_1=0$, $c_2=0$, $c_3=0$. 这就证明了不可能有不全为 0 的常数 c_1, c_2 和 c_3, 使函数组(4)的线性组合恒等于 0. 因此, 函数组(4)是线性无关的.

再考虑函数组

$$1,\ x,\ x^2,\ \cdots,\ x^n \quad (-\infty<x<\infty), \tag{5}$$

如果有

$$c_1\cdot 1+c_2x+c_3x^2+\cdots+c_{n+1}x^n=0 \quad (-\infty<x<\infty),$$

则可以对它依次求 n 次导数, 得到

$$\begin{cases} c_2+2c_3x+\cdots+nc_{n+1}x^{n-1}=0 \\ 2c_3+\cdots+n(n-1)c_{n+1}x^{n-2}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ n!c_{n+1}=0. \end{cases}$$

逆推而上, 则推出 $c_{n+1}=0$, $c_n=0$, $\cdots$, $c_3=0$, $c_2=0$, $c_1=0$. 这就证明了函数组(5)也是线性无关的.

请读者自己验证下列结论:

(1) $\cos 2x$, $\cos^2 x$, $\sin^2 x$ 是线性相关的;

(2) $\cos^2 x$, $\sin^2 x$ 是线性无关的;

(3) 1, x, $3x-5$ 是线性相关的;

(4) $0, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 是线性相关的(这里 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\cdots$, $\varphi_n(x)$ 是在区间 I 上的任何 n 个函数);

(5) 若 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 是线性相关的, 则 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\cdots$, $\varphi_n(x)$, $\varphi_{n+1}(x)$ 也是线性相关的 (这里 $\varphi_{n+1}(x)$ 是任给的函数);

(6) 若 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 是线性无关的, 则 $\varphi_1(x)$,

$\varphi_2(x)$, $\cdots$, $\varphi_k(x)$ $(1\leqslant k<n)$也是线性无关的. [提示: 用反证法和(5)的结论.]

为了更有效地判断函数组是否线性相关, 我们引进一个重要的行列式.

定义2 设函数组(2)中各个函数有 $m-1$ 阶的导数, 这样就可以作一个行列式

$$W(x)\equiv\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_m(x)\\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_m'(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_1^{(m-1)}(x) & \varphi_2^{(m-1)}(x) & \cdots & \varphi_m^{(m-1)}(x)\end{vmatrix},$$

这行列式叫作函数组(2)的伏朗斯基(Wronski)行列式.

例如, 函数组 1, $\sin x$, $\cos x$ 的伏朗斯基行列式为

$$W(x)\equiv\begin{vmatrix}1 & \sin x & \cos x\\ 0 & \cos x & -\sin x\\ 0 & -\sin x & -\cos x\end{vmatrix}=-1.$$

引理2 若函数组(2)是线性相关的, 则它的伏朗斯基行列式 $W(x)\equiv0$. (这里以及下面我们默认函数组(2)的各个函数都有 $m-1$ 阶的导数.)

【证明】 因为函数组(2)是线性相关的, 所以存在不全为0的常数 c_1, c_2, $\cdots$, c_m, 使得对一切 $x\in I$, 有

$$c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots+c_m\varphi_m(x)=0. \tag{6}$$

对此恒等式依次求 $m-1$ 次导数, 得到

$$\begin{cases}c_1\varphi_1'(x)+c_2\varphi_2'(x)+\cdots+c_m\varphi_m'(x)=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ c_1\varphi_1^{(m-1)}(x)+c_2\varphi_2^{(m-1)}(x)+\cdots+c_m\varphi_m^{(m-1)}(x)=0.\end{cases} \tag{7}$$

等式(6)和(7)组成一个关于变元 c_1, c_2, $\cdots$, c_m 的线性齐次联立方程组, 由于它有非零解 c_1, c_2, $\cdots$, c_m, 所以它的系数行列

式 $W(x)=0$，其中 $x\in I$ 是任意的，即 $W(x)\equiv 0$。引理 2 得证。】

由引理 2 和反证法直接推出：若函数组(2)的伏朗斯基行列式 $W(x)\not\equiv 0$，则函数组(2)是线性无关的。

上述推论的逆命题是不成立的，即：不能由函数组(2)的线性无关性推出它的伏朗斯基行列式 $W(x)\not\equiv 0$。例如，易证函数组

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}x^2 & (x\geqslant 0)\\ 0 & (x<0),\end{cases}\qquad \varphi_2(x)=\begin{cases}0 & (x\geqslant 0)\\ x^2 & (x<0)\end{cases}$$

是线性无关的，但是它的伏朗斯基行列式 $W(x)\equiv 0$。

不过，如果 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)\in S$，那么上述推论的逆命题还是成立的。

引理 3 若 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 是齐次线性微分方程(1)的两个解，则它们的伏朗斯基行列式

$$W(x)\equiv\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x)\\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x)\end{vmatrix}$$

恒等于 0 是 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 线性相关的充分和必要条件。

【证明】 必要性的证明已见于引理 2；下面是充分性的证明。

设 $W(x)\equiv 0$，特别当 $x=x_0$ $(x_0\in I)$ 时，有 $W(x_0)=0$。现在以 $W(x_0)$ 为系数行列式作一代数联立方程组

$$\begin{cases}\varphi_1(x_0)c_1+\varphi_2(x_0)c_2=0\\ \varphi_1'(x_0)c_1+\varphi_2'(x_0)c_2=0.\end{cases}\tag{8}$$

由于系数行列式 $W(x_0)=0$，所以联立方程组(8)至少有一非零解

$$c_1=\alpha_1,\qquad c_2=\alpha_2.$$

令 $u(x)=\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)$，则由引理 1 可知 $y=u(x)$ 是齐次

线性微分方程(1)的解,而且由(8)可知它满足初始条件

$$u(x_0)=\alpha_1\varphi_1(x_0)+\alpha_2\varphi_2(x_0)=0,$$
$$u'(x_0)=\alpha_1\varphi_1'(x_0)+\alpha_2\varphi_2'(x_0)=0.$$

另一方面,$y=v(x)\equiv 0$ 是微分方程(1)的解,而且它与 $y=u(x)$ 满足相同的初始条件(即 $v(x_0)=0$, $v'(x_0)=0$). 因此,由解的唯一性(见第二节中的定理)推出 $u(x)\equiv v(x)$,亦即

$$\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)\equiv 0.$$

由于常数 α_1, α_2 不全为 0,从而证明了 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ 是线性相关的. 】

注意,在引理 3 的证明中,实际上只用了 $W(x)$在一点 x_0 上的值 $W(x_0)=0$. 因此,可以用反证法推出下面的结论:

引理 4 设 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)\in S$,则 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ 是线性无关的充分和必要条件是:它们的伏朗斯基行列式 $W(x)\neq 0$ $(x\in I)$.

由引理 3 和引理 4 可见,齐次线性微分方程(1)的任意两个解 $\varphi_1(x)$和 $\varphi_2(x)$的伏朗斯基行列式 $W(x)$只有下述两种可能:

1) $W(x)\equiv 0$(即:$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$为线性相关);或

2) $W(x)\neq 0$(即:$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$为线性无关).

因此,只要有一点 $x_0\in I$,使得 $W(x_0)\neq 0$,那么 $W(x)$就属于上述第二种可能;从而 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ 是线性无关的. 这时,我们称 $\varphi_1(x)$与 $\varphi_2(x)$为齐次线性微分方程(1)的一个基本解组.

引理 5 齐次线性微分方程(1)的基本解组是存在的.

【证明】 根据第二节关于解的存在定理,给定初值条件

$$y(x_0)=1, \quad y'(x_0)=0, \tag{9}$$

则初值问题(1)+(9)有并且只有一个解 $y=\psi_1(x)$；同样，又给定初值

$$y(x_0)=0, \quad y'(x_0)=1, \tag{10}$$

则初值问题(1)+(10)有并且只有一个解 $y=\psi_2(x)$. 这样，我们得到两个解 $\psi_1(x)$ 与 $\psi_2(x)$，它们的伏朗斯基行列式为

$$\begin{vmatrix} \psi_1(x_0) & \psi_2(x_0) \\ \psi_1'(x_0) & \psi_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

因此，$\psi_1(x)$ 与 $\psi_2(x)$ 组成方程(1)的一个基本解组. ▌

定理 1 设 $y=\varphi_1(x)$ 和 $y=\varphi_2(x)$ 是齐次线性微分方程(1)的两个线性无关的解(亦即它们是一个基本解组)，令

$$y=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x), \tag{11}$$

其中 c_1 与 c_2 是两个任意的常数，那么通解(11)表达了微分方程(1)的一切解.

【证明】 由引理 1 可知，(11)表示微分方程(1)的解.

现在，设任意给定微分方程(1)的一个解 $y=u(x)$. 令

$$\begin{cases} c_1\varphi_1(x_0)+c_2\varphi_2(x_0)=u(x_0) \\ c_1\varphi_1'(x_0)+c_2\varphi_2'(x_0)=u'(x_0). \end{cases} \tag{12}$$

这是关于 c_1 和 c_2 的代数联立方程组，它的系数行列式就是 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 的伏朗斯基行列式 $W(x)$ 在 $x=x_0$ 上的值 $W(x_0)$. 由于 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 组成一个基本解组，所以 $W(x_0)\neq 0$. 因此，由(12)可以唯一地确定 $c_1=\alpha_1$, $c_2=\alpha_2$. 然后，令

$$v(x)=\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x). \tag{13}$$

它当然也是微分方程(1)的一个解，而且满足初值条件

$$\begin{cases} v(x_0)=\alpha_1\varphi_1(x_0)+\alpha_2\varphi_2(x_0)=u(x_0) \\ v'(x_0)=\alpha_1\varphi_1'(x_0)+\alpha_2\varphi_2'(x_0)=u'(x_0). \end{cases} \tag{14}$$

这就是说，微分方程(1)的两个解 $y=u(x)$ 和 $y=v(x)$ 满足相

同的初值条件(14). 因此，由解的唯一性推出 $u(x)=v(x)$，即

$$u(x)=\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x).$$

这就证明了定理的结论. ▌

这定理告诉我们，线性空间 S 是由两个线性无关的元素 φ_1 与 φ_2 生成的，因此 S 是一个二维的线性空间.

定理 2 设已知齐次线性微分方程 (1) 的两个线性无关的解 $y=\varphi_1(x)$ 和 $y=\varphi_2(x)$，则微分方程(1)的系数函数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 由 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 唯一确定.

【证明】 事实上，我们有

$$\begin{cases}\varphi_1''(x)+p(x)\varphi_1'(x)+q(x)\varphi_1(x)=0\\ \varphi_2''(x)+p(x)\varphi_2'(x)+q(x)\varphi_2(x)=0,\end{cases} \tag{15}$$

而且可以把它看成是关于 $p(x)$ 和 $q(x)$ 的一个联立代数方程组，它的系数行列式就是 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 的伏朗斯基行列式 $W(x)$（只差一个负号）. 由于 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 是线性无关的，因此 $W(x)\neq 0$. 所以由(15)可以唯一地确定

$$p(x)=-\frac{\varphi_1(x)\varphi_2''(x)-\varphi_1''(x)\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)\varphi_2'(x)-\varphi_1'(x)\varphi_2(x)}=-\frac{W'(x)}{W(x)} \tag{16}$$

和

$$q(x)=\frac{\varphi_1'(x)\varphi_2''(x)-\varphi_1''(x)\varphi_2'(x)}{W(x)}. \tag{17}$$

从而定理 2 得证. ▌

定理 3 设已知 $y=u(x)$ 是齐次线性微分方程(1)的一个非零解[为了简单起见，设 $u(x)\neq 0\,(x\in I)$]，则可求得方程(1)的通解为

$$y=C_1u(x)+C_2u(x)\int_{x_0}^{x}e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}\cdot\frac{dx}{[u(x)]^2}. \tag{18}$$

【证明】 设 $y=y(x)$ 是方程(1)的任一解，则

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0. \tag{19}$$

另一方面，对于 $y=u(x)$，有

$$u''(x)+p(x)u'(x)+q(x)u(x)=0. \tag{20}$$

用 $u(x)$ 乘(19)减去用 $y(x)$ 乘(20)，得到

$$(uy''-u''y)+p(x)(uy'-u'y)=0,$$

亦即

$$(uy'-u'y)'+p(x)(uy'-u'y)=0.$$

这是一个关于 $(uy'-u'y)$ 的一阶齐次线性微分方程式，容易解得

$$uy'-u'y=c_2e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}, \tag{21}$$

其中 c_2 是一个任意常数. 再以 u^2 除(21)式的两端，就有

$$\left(\frac{y}{u}\right)'=\frac{c_2}{u^2}e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}.$$

两边积分，得到

$$\frac{y}{u}=c_1+c_2\int_{x_0}^{x}e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}\cdot\frac{dx}{[u(x)]^2},$$

从而得到(18). 定理 3 得证. ▌

定理 3 告诉我们：对于二阶齐次线性微分方程式，只要得到它的一个非零解，就可以求得它的通解. 这一点对于某些求解问题是很有用的.

习　题　4·3

1. 设 $y=\varphi(x)$ 与 $y=\psi(x)$ 是微分方程 $y''+q(x)y=0$ 的任意两个解，则它们的伏朗斯基行列式 $W(x)\equiv C$（常数）.
2. 已知微分方程 $y''+q(x)y=0$ 有一个特解为 $y=e^x$. 试求这方程的通解，并确定 $q(x)=?$
3. 设 $y=\varphi(x)$ 是齐次线性微分方程(1)的一个非零解（即 $\varphi(x)\not\equiv 0$）. 如果 $x_0\in I$ 是它的一个零点，即 $\varphi(x_0)=0$，那么 $\varphi'(x_0)\neq 0$（这也

就是说，$\varphi(x)$只有简单的零点）.

4. 设 $y=\varphi_1(x)$和 $y=\varphi_2(x)$是齐次线性微分方程(1)的两个线性无关的解，则它们没有共同的零点.

5* 把本节中的理论推广到 n 阶的齐次线性微分方程式:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0,$$

其中系数函数 $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\cdots$, $p_n(x)$ 在区间 I 上连续.

第四节　常系数线性齐次微分方程式

根据上一节的理论，我们知道，对于二阶齐次线性微分方程式，只要知道它的两个线性无关的特解（甚至只要知道它的一个非零解），就可以求得它的通解. 所以问题就在于求它的一个或两个特解. 一般而言，这是一个难题. 在这一节，我们考虑一个比较简单的特殊情况，即:

$$y''+ay'+by=0, \tag{1}$$

其中系数 a 和 b 都是实的已知常数. 方程(1)叫作常系数的齐次线性微分方程式. 我们的任务是求方程(1)的通解.

根据微分方程(1)的特点以及指数函数 $y=e^{\lambda x}$ 的特性，我们容易猜测方程(1)有如下形式的特解

$$y=e^{\lambda x}, \tag{2}$$

其中 λ 是待定的常数. 把(2)代入(1)，得

$$(\lambda^2+a\lambda+b)e^{\lambda x}=0.$$

由于 $e^{\lambda x}\neq 0$, 所以得到一个二次的多项式方程

$$\lambda^2+a\lambda+b=0, \tag{3}$$

它叫作齐次线性微分方程(1)的特征方程；而它的根

$$\lambda_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}, \quad \lambda_2=\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \tag{4}$$

叫作方程(1)的特征根.

令判别式 $\Delta=a^2-4b$，现在分别就下述情形进行求解：

1) $\Delta>0$：此时由(4)得到两个实的特征根 λ_1 和 λ_2，而且 $\lambda_1\neq\lambda_2$；根据(2)，得到两个特解

$$y_1=e^{\lambda_1 x} \quad \text{和} \quad y_2=e^{\lambda_2 x}. \tag{5}$$

它们的伏朗斯基行列式为

$$W(x)=y_1y_2'-y_1'y_2=(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}\neq 0.$$

这样，(5)就是一个基本解组．因此，我们得到方程(1)的通解

$$y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}. \tag{6}$$

2) $\Delta<0$：此时特征根 λ_1 和 λ_2 是一对共轭复根

$$\lambda_1=\alpha+i\beta \quad \text{和} \quad \lambda_2=\alpha-i\beta,$$

其中 $\alpha=-\dfrac{1}{2}a$，$\beta=\dfrac{1}{2}\sqrt{-\Delta}>0$．因此，我们得到方程(1)的两个复值的解

$$y_1^*=e^{\lambda_1 x} \quad \text{和} \quad y_2^*=e^{\lambda_2 x}.$$

利用复数的指数形式和欧拉公式，可以推出

$$\begin{cases} y_1^*=e^{\alpha x}e^{i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x), \\ y_2^*=e^{\alpha x}e^{-i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x). \end{cases}$$

但是，实际问题须要求实值解．利用迭加原理，推出

$$\begin{cases} y_1=\dfrac{1}{2}(y_1^*+y_2^*)=e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ y_2=\dfrac{1}{2i}(y_1^*-y_2^*)=e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{cases} \tag{7}$$

这是方程(1)的两个解，而且它们都是实值的．由于 y_1 和 y_2 的伏朗斯基行列式

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\beta e^{-\alpha x}\neq 0,$$

就是说，(7)是一个基本解组．所以我们求得方程(1)的通解

$$y=c_1e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2e^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{8}$$

3) $\Delta=0$. 此时特征根是相重的，即 $\lambda_1=\lambda_2=-\frac{a}{2}$，所以只能得到一个特解

$$y_1=e^{\lambda_1 x}.$$

再由上一节的定理 3[公式(18)]，我们得到方程(1)的通解

$$y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_1 x}\int_0^x e^{-\int_0^x a dt}\frac{dx}{(e^{\lambda_1 x})^2},$$

容易算出

$$\int_0^x e^{-\int_0^x a dt}\frac{dx}{(e^{\lambda_1 x})^2}=x,$$

因此，

$$y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2xe^{\lambda_1 x}. \tag{9}$$

应该特别指出：这里 $e^{\lambda_1 x}$ 和 $xe^{\lambda_1 x}$ 是两个线性无关的解．这样，我们做题时就可直接写出通解(9)，而不必再通过公式(18)．

总结以上的讨论，我们就完全解决了常系数微分方程(1)的求解问题．

【例题 1】 求解 $y''-4y=0$．

令 $y=e^{\lambda x}$，代入方程，则得到特征方程

$$\lambda^2-4=0.$$

它有两个不同的特征根 $\lambda_1=2$ 和 $\lambda_2=-2$．因此，我们得到通解

$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}.$$

【例题 2】 求解 $y''+4y=0$．

令 $y=e^{\lambda x}$，代入方程，则得到特征方程

$$\lambda^2+4=0.$$

它有一对共轭的复根 $\lambda_1=2i$ 和 $\lambda_2=-2i$．因此，我们得到两个复值解

$$e^{\lambda_1 x}=\cos 2x+i\sin 2x,$$

$$e^{\lambda_2 x}=\cos 2x-i\sin 2x.$$

再利用迭加原理求得两个实值解

$$y_1=\cos 2x \quad 和 \quad y_2=\sin 2x.$$

从而得到通解

$$y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x.$$

【例题 3】 求解 $y''+2y'+y=0$.

令 $y=e^{\lambda x}$，代入方程，则得到特征方程

$$\lambda^2+2\lambda+1=0.$$

它有重根 $\lambda_1=\lambda_2=-1$. 从而可得到两个线性无关的解 $y_1=e^{-x}$ 和 $y_2=xe^{-x}$. 因此，通解为

$$y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}.$$

最后，我们来解决以前遗留下来的一个问题——弹簧振动方程的求解问题(参看本章第一节例题 2).

【例题 4】 求解弹簧振动方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+r\frac{dx}{dt}+kx=0, \tag{10}$$

其中物理常数 m, r, k 都是正的.

令 $x=e^{\lambda t}$，代入方程(10)，则得到它的特征方程为

$$m\lambda^2+r\lambda+k=0.$$

它有两个特征根

$$\lambda_1=\frac{1}{2m}(-r+\sqrt{r^2-4mk}),$$

$$\lambda_2=\frac{1}{2m}(-r-\sqrt{r^2-4mk}).$$

令判别式 $\Delta=r^2-4mk$，则可以分成下列情形：

1) $\Delta>0$: 此时，特征根 λ_1 和 λ_2 是实的，由于 m, r, k 都是正数，所以 $\lambda_2<\lambda_1<0$. 因此，由通解

$$x=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t} \tag{11}$$

可见方程(10)的任何解 $x=x(t)$ 都满足

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=0;$$

而且，当 $c_1\neq0$ 与 $c_2=0$(或 $c_1=0$ 与 $c_2\neq0$)时，有 $x(t)\neq0$. 而当 $c_1\neq0$ 与 $c_2\neq0$ 时，由(11)令

$$c_1e^{\lambda_1t}+c_2e^{\lambda_2t}=0. \tag{12}$$

如果 c_1 与 c_2 同号，则(12)不能成立. 如果 c_1 与 c_2 异号，则有

$$t=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\log\left(\frac{-c_1}{c_2}\right).$$

这样，我们就证明了方程(10)的一切非零解(即 c_1 与 c_2 不全为 0)最多只有一个零点. 这相当于弹簧振子最多只能一次经过静止点，因此弹簧振子不能振动. 当阻尼很大，即 r 很大，对应于 $\Delta>0$ 时，就是这种情况. 我们可以想象，把弹簧振子放到胶状的液体中，就可能会使弹簧振子不作振动，而慢慢地趋于静止(见图 4-4).

2) $\Delta<0$: 此时，特征根 λ_1 与 λ_2 是一对共轭的复根 $\lambda_1=\alpha+i\beta$, $\lambda_2=\alpha-i\beta$, 其中

$$\alpha=\frac{-r}{2m}<0,\quad \beta=\frac{\sqrt{4mk-r^2}}{2m}>0.$$

我们得到通解

$$x=c_1e^{\alpha t}\cos\beta t+c_2e^{\alpha t}\sin\beta t,$$

也可以把它写成等价的形式

$$x=Ae^{\alpha t}\cos(\beta t+\theta), \tag{13}$$

其中 $A\geqslant0$ 和 θ 是两个任意常数. 当 $r>0$, 即 $\alpha<0$ 时，由(13)可见

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=0.$$

这就证明，有阻尼的弹簧振动总是要趋于静止的. 而且，由(13)可见，方程(10)的任何非零解(即 $A\neq0$)都有无穷多个零点. 这相当于小阻尼常数 r 的情形($\Delta<0$)，弹簧振子将不断

地作来回的振动，而振幅 $Ae^{\alpha t}$ 将衰减到零(见图 4-5).

3) $\Delta=0$: 此时有两个相同的特征根 $\lambda_1=\lambda_2=\frac{-r}{2m}$，我们得到通解

$$x=(c_1+c_2t)e^{\frac{-r}{2m}t}. \tag{14}$$

由(14)容易验证，一切非零解最多只有一个零点. 这就是说，弹簧不能振动. 在性质上与 $\Delta>0$ 的情形相仿.

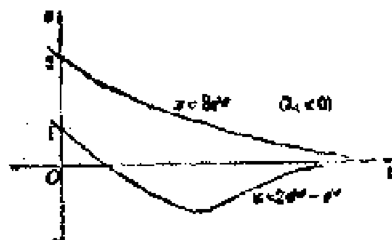


图 4-4

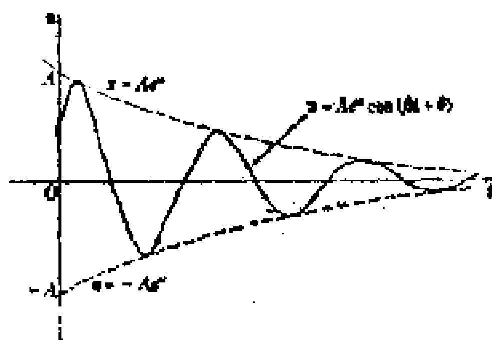


图 4-5

习 题 4.4

1. 求解下列微分方程:
   (1) $y''+3y'+y=0$;　　(2) $y''+y'+y=0$;
   (3) $y''+\lambda y'+y=0$ (λ 是实的常数);
   (4) $y''+ay=0$ (a 是实的常数);
   (5) $y'''+y'=0$;　　(6) $y'''+y=0$;
   (7) $y^{(4)}-y=0$.
2. 试确定常数 a，使得微分方程 $y''+ay=0$ 的一切解都是以 2π 为周期的周期解.
3. 求解欧拉方程

$$x^2y''+axy'+by=0,$$

其中 a 和 b 是常数. [提示: 作自变量变换 $x=e^t$，可把欧拉方程化成常系数的齐次线性微分方程.]

4* 试讨论 n 阶的常系数线性齐次方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0$$

的一般解法.

第五节　非齐次的线性微分方程式

现在我们来研究非齐次的线性微分方程式

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x), \tag{1}$$

其中 $p(x)$, $q(x)$ 和 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数. 通常, $f(x)$ 叫作微分方程(1)的强迫函数. 与非齐次线性方程(1)相应的齐次线性方程为

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0. \tag{2}$$

在这一节中, 我们假定 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 是齐次线性方程(2)的两个线性无关的解.

引理 1　设 $y=u(x)$ 是非齐次线性方程(1)的一个特解, 则对于任意常数 c_1 和 c_2,

$$y=u(x)+c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x) \tag{3}$$

是方程(1)的解; 而且通解(3)表达了方程(1)的一切解.

【证明】　由于 $u(x)$ 满足方程(1), 而 $c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)$ 满足方程(2), 所以把公式(3)中的 y 代入方程(1)的左边, 我们得到

$$\begin{aligned}y''+p(x)y'+q(x)y=&[u''(x)+p(x)u'(x)+q(x)u(x)]\\&+[(c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x))''+p(x)(c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x))'\\&+q(x)(c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x))]=f(x).\end{aligned}$$

即公式(3)表示方程(1)的解.

现设 $y=v(x)$ 是方程(1)的任意一个解, 则由

$$v''(x)+p(x)v'(x)+q(x)v(x)=f(x),$$

$$u''(x)+p(x)u'(x)+q(x)u(x)=f(x)$$

推出

$$(v(x)-u(x))''+p(x)(v(x)-u(x))'$$
$$+q(x)(v(x)-u(x))=0.$$

即 $v(x)-u(x)$ 是齐次线性方程(2)的一个解，从而应有

$$v(x)-u(x)=\bar{c}_1\varphi_1(x)+\bar{c}_2\varphi_2(x)$$

或
$$v(x)=u(x)+\bar{c}_1\varphi_1(x)+\bar{c}_2\varphi_2(x).$$

这就证明了公式(3)可以表达方程(1)的一切解. ▌

由此引理可见，为了求解非齐次的线性微分方程(1)，假定已知相应的齐次方程(2)的两个线性无关的解 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$，那么只须求出非齐次方程(1)的一个特解 $u(x)$ 就够了. 如何求这个特解呢？可以采用下面的常数变易法：

大家知道

$$y=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)\quad(c_1\text{ 与 }c_2\text{ 是常数})$$

是齐次方程(2)的解，因此它不可能是非齐次方程(1)的解. 为了确定非齐次方程(1)的解，我们须要变动常数 c_1 和 c_2，令

$$y=c_1(x)\varphi_1(x)+c_2(x)\varphi_2(x)\tag{4}$$

为(1)的解，其中 $c_1(x)$ 与 $c_2(x)$ 是两个待定的函数. 对公式(4)求导数，得

$$y'=c_1(x)\varphi_1'(x)+c_2(x)\varphi_2'(x)+c_1'(x)\varphi_1(x)$$
$$+c_2'(x)\varphi_2(x).$$

为了在求 y'' 时不出现待定函数 $c_1(x)$ 与 $c_2(x)$ 的二阶导数，令

$$c_1'(x)\varphi_1(x)+c_2'(x)\varphi_2(x)=0,\tag{5}$$

则得

$$y'=c_1(x)\varphi_1'(x)+c_2(x)\varphi_2'(x).\tag{6}$$

对它再求导数，得

$$y''=c_1(x)\varphi_1''(x)+c_2(x)\varphi_2''(x)$$
$$+c_1'(x)\varphi_1'(x)+c_2'(x)\varphi_2'(x).\tag{7}$$

把(7)，(6)和(4)代入方程(1)，就可推出

$$c_1'(x)\varphi_1'(x)+c_2'(x)\varphi_2'(x)=f(x). \tag{8}$$

联合(5)和(8)，即得关于 $c_1'(x)$ 与 $c_2'(x)$ 的一个联立方程组

$$\begin{cases}c_1'(x)\varphi_1(x)+c_2'(x)\varphi_2(x)=0\\ c_1'(x)\varphi_1'(x)+c_2'(x)\varphi_2'(x)=f(x),\end{cases} \tag{9}$$

它的系数行列式就是 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 的伏朗斯基行列式

$$W(x)=\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x)\\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x)\end{vmatrix}\neq 0.$$

因此由(9)可以解出

$$c_1'(x)=\frac{-\varphi_2(x)f(x)}{W(x)},\quad c_2'(x)=\frac{\varphi_1(x)f(x)}{W(x)}.$$

取积分，则得

$$c_1(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{-\varphi_2(\xi)f(\xi)}{W(\xi)}d\xi,\quad c_2(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi_1(\xi)f(\xi)}{W(\xi)}d\xi.$$

再把它们代回(4)，就得到非齐次方程(1)的一个特解

$$y=\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi_1(\xi)\varphi_2(x)-\varphi_2(\xi)\varphi_1(x)}{W(\xi)}f(\xi)d\xi, \tag{10}$$

而且容易直接验证它满足初值：$y(x_0)=0$ 和 $y'(x_0)=0$.

再设 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 是齐次方程(2)的一个标准的基本解组，即它们分别满足初始条件 $\varphi_1(x_0)=1$、$\varphi_1'(x_0)=0$ 与 $\varphi_2(x_0)=0$、$\varphi_2'(x_0)=1$. 那么就可以得到非齐次线性微分方程(1)满足初始条件

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0' \tag{11}$$

的特解为

$$y=[y_0\varphi_1(x)+y_0'\varphi_2(x)]+\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi_1(\xi)\varphi_2(x)-\varphi_2(\xi)\varphi_1(x)}{W(\xi)}f(\xi)d\xi. \tag{12}$$

上式右边第一项只与初始条件(11)有关，而第二项则与强迫

函数 $f(x)$ 有关. 这就表明, 一个线性系统对初始激发和强迫激发的反应是可以分开的.

【例题 1】 设非齐次线性微分方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=p\cos nt, \tag{13}$$

其中 m, k, p 和 n 都是正的常数. 试求解此方程.

先考虑与(13)相应的齐次线性方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0. \tag{14}$$

这是常系数的齐次线性方程, 容易求出它的一个标准的基本解组

$$x_1(t)=\cos\omega t,$$

$$x_2(t)=\frac{1}{\omega}\sin\omega t,$$

其中 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}>0$. 它们的伏朗斯基行列式为

$$W(t)=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\omega t & \frac{1}{\omega}\sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t\end{vmatrix}=1.$$

因此, 利用公式(12)则得到方程(13)满足初始条件

$$x(0)=0,\quad x'(0)=0$$

的解为

$$x=\frac{p}{m\omega}\int_0^t\sin\omega(t-\xi)\cos n\xi\,d\xi.$$

利用

$$\sin\omega(t-\xi)\cos n\xi$$

$$=\frac{1}{2}\{\sin[\omega t-(\omega-n)\xi]+\sin[\omega t-(\omega+n)\xi]\}$$

可以算出积分

$$\int_0^t \sin\omega(t-\xi)\cos n\xi\, d\xi$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\omega}{\omega^2-n^2}(\cos nt-\cos\omega t), & \text{当 } n\neq\omega \text{ 时;}\\[2ex] \dfrac{1}{2}t\sin\omega t, & \text{当 } n=\omega \text{ 时.}\end{cases}$$

所以当 $n\neq\omega$ 时，我们得到方程(13)的解为

$$x=\frac{p}{m(\omega^2-n^2)}(\cos nt-\cos\omega t),$$

或

$$x=\frac{2p}{m(\omega^2-n^2)}\sin\frac{\omega-n}{2}t\cdot\sin\frac{\omega+n}{2}t. \tag{15}$$

通常，$\omega+n$ 要比 $|\omega-n|$ 大许多倍，因此特解(15)的图形可以看作以

$$x=\frac{\pm 2p}{m(\omega^2-n^2)}\cdot\sin\frac{\omega-n}{2}t$$

为上下“包线”的一条曲线(图 4-6 中的粗曲线)。

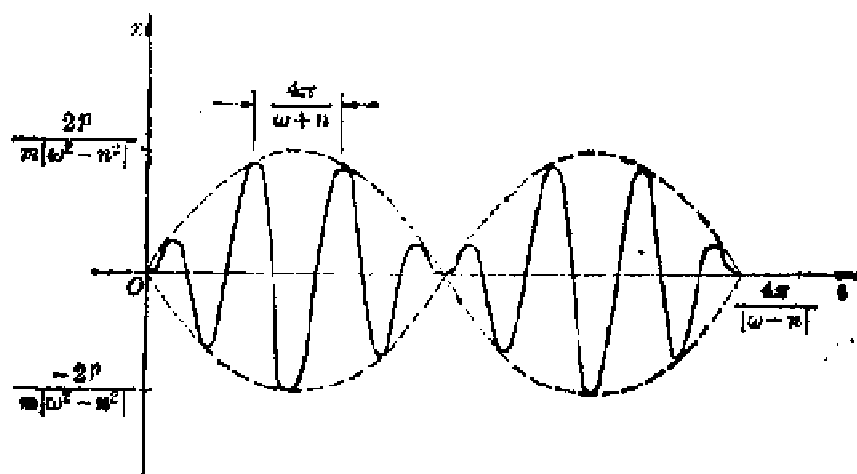


图 4-6

而当 $n=\omega$ 时，有

$$x=\frac{p}{2m\omega}t\sin\omega t,$$

它关于 t 是无界的(见图 4-7)。

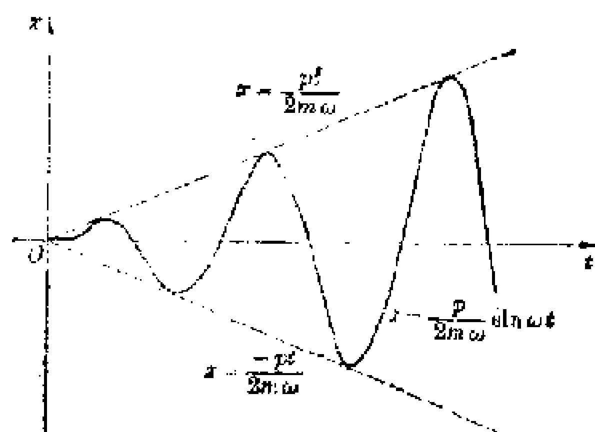


图 4 7

上述结论可作力学解释如下：方程(13)是一个弹簧在受强迫力为 $p\cos nt$ 下的振动方程．当外加频率 n 不等于弹簧本身的固有频率 ω 时，就不会产生共振；而当外加频率 n 等于固有频率 ω 时，就产生了共振．在实际的应用中，这种共振现象的分析是十分重要的．

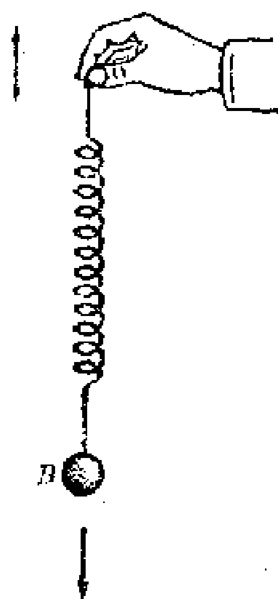


图 4-8

最后，请读者自己做一个弹簧振动系统，用手持弹簧的上端(图 4–8)，作上下连续抖动，可以发现，在某种抖动的频率下，弹簧出现共振现象；而在另一种抖动的频率下，却不出现共振．例如作高频的抖动，弹簧的振子 B 反而基本上是静止不动的(请读者利用线性微分方程的解进行解释)．对高速行驶的车辆，都须要用弹簧垫进行消振，其基本原理与这里所说的弹簧受迫振动是相仿的．

对于常系数的线性非齐次方程

$$y''+ay'+by=f(x),$$

总能够用上面讲的常数变易法求解．但是，当强迫函数 $f(x)$ 是正弦(或余弦)函数、指数函数与多项式时，则采用待定系数法

是很有效的．但在这里我们不准备对待定系数法作过于烦琐的讨论，而仅通过下面几个例子来介绍这个方法的基本思路．

【例题 2】 求解

$$y''+3y'+4y=5e^{\beta x}. \tag{16}$$

从这方程的一些特点我们可以推测它有下面形状的特解

$$y=Ae^{\beta x}, \tag{17}$$

这里 A 是待定系数．把(17)代入方程(16)，得

$$A(\beta^2+3\beta+4)e^{\beta x}=5e^{\beta x}. \tag{18}$$

当 $\beta^2+3\beta+4\neq 0$（即 β 不是与(16)相应的齐次方程的特征根），则由(18)可以确定 A，从而由(17)得到所求的特解为

$$y=\frac{5}{\beta^2+3\beta+4}e^{\beta x}.$$

当 β 是特征根时怎么办？我们在下面作一简单的分析：

令微分运算子

$$L[y]\equiv y''+ay'+by,$$

其中 a, b 是常数．令 $y=Ae^{\lambda x}$（A 是常数，λ 是参数），则

$$L[y]=L[Ae^{\lambda x}]=A(\lambda^2+a\lambda+b)e^{\lambda x}.$$

令特征多项式 $(\lambda^2+a\lambda+b)=P(\lambda)$，即得

$$L[Ae^{\lambda x}]=A\cdot P(\lambda)e^{\lambda x}. \tag{19}$$

将上式两边依次对参数 λ 求二次偏导数，则有

$$L[Axe^{\lambda x}]=A[xP(\lambda)+P'(\lambda)]e^{\lambda x}; \tag{20}$$

$$L[Ax^2e^{\lambda x}]=A[x^2P(\lambda)+2xP'(\lambda)+P''(\lambda)]e^{\lambda x}. \tag{21}$$

如果求解微分方程

$$y''+ay'+by=ke^{\beta x}, \tag{22}$$

1) 当 β 不是特征根（即 $P(\beta)\neq 0$）时，可以利用公式(19)，使

$$L[Ae^{\beta x}]=A\cdot P(\beta)e^{\beta x}=Ke^{\beta x}.$$

由此可确定 $A=K/P(\beta)$，从而得到方程(22)的一个特解

$$y=\frac{K}{P(\beta)}e^{\beta x}.$$

2) 当 β 是简单的特征根(即 $P(\beta)=0,\ P'(\beta)\neq 0$)时，可利用公式(20)，使

$$L[Axe^{\beta x}]=A\cdot P'(\beta)e^{\beta x}=Ke^{\beta x}.$$

由此可确定 $A=K/P'(\beta)$，从而得到一个特解

$$y=\frac{K}{P'(\beta)}xe^{\beta x}.$$

3) 当 β 是二重的特征根(即 $P(\beta)=0, P'(\beta)=0, P''(\beta)\neq 0$)时，可利用公式(21)(注意 $P''(\lambda)\equiv 2$)，使

$$L[Ax^2e^{\beta x}]=A\cdot P''(\beta)e^{\beta x}=Ke^{\beta x}.$$

由此可确定 $A=\frac{K}{2}$，从而得到特解

$$y=\frac{K}{2}x^2e^{\beta x}.$$

我们把上面的结论再强调一下：对于非齐次方程(22)，当 β 不是特征根时，它有形式如 $y=Ae^{\beta x}$ 的特解；当 β 是简单的特征根时，它有形式如 $y=Axe^{\beta x}$ 的特解；当 β 是二重的特征根时，它有特解 $y=Ax^2e^{\beta x}$. 以上 A 都是待定常数.

【例题 3】 用待定系数法求解非齐次线性方程(13).

利用欧拉公式，得

$$\cos nt=\frac{1}{2}(e^{int}+e^{-int}),$$

$$\sin nt=\frac{1}{2i}(e^{int}-e^{-int}).$$

因此方程(13)可以写成

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=\frac{p}{2}(e^{int}+e^{-int}). \tag{23}$$

仿例题 2 的解法，我们令

$$x=Ae^{int}+Be^{-int} \tag{24}$$

为(23)的特解．把(24)代入(23)，得到

$$A[m(in)^2+k]e^{int}+B[m(-in)^2+k]e^{-int}$$

$$=\frac{p}{2}e^{int}+\frac{p}{2}e^{-int},$$

从而

$$A(-m\cdot n^2+k)=\frac{p}{2},$$

$$B(-m\cdot n^2+k)=\frac{p}{2}.$$

设 in 与 $-in$ 不是特征根，即

$$-m\cdot n^2+k\neq 0,$$

亦即外加频率 n 不等于固有频率 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ 时，那么可以确定

$$A=B=\frac{p}{2(k-m\cdot n^2)}=\frac{p}{2m(\omega^2-n^2)}.$$

所以由(24)，我们得到特解

$$x=\frac{p}{m(\omega^2-n^2)}\cdot\frac{e^{int}+e^{-int}}{2}=\frac{p}{m(\omega^2-n^2)}\cos nt.$$

其次，设 in 与 $-in$ 是特征根，即 $n=\omega$．则仿例题 2，我们设方程(23)有特解

$$x=t(Ae^{int}+Be^{-int}), \tag{25}$$

把它代入方程(23)，得

$$t(-m\cdot n^2+k)(Ae^{int}+Be^{-int})+2m(iAne^{int}-iBne^{-int})$$

$$=\frac{p}{2}(e^{int}+e^{-int}).$$

因为 $n=\omega$，即 $(-m\cdot n^2+k)=0$，所以

$$i2mnA=\frac{p}{2},$$

$$-i2mnB=\frac{p}{2}.$$

即得

$$A=\frac{1}{2i}\cdot\frac{p}{2mn},$$

$$B=\frac{-1}{2i}\cdot\frac{p}{2mn}.$$

再代回(25)，则得到特解

$$x=\frac{tp}{2mn}\cdot\frac{e^{int}-e^{-int}}{2i}=\frac{p}{2mn}t\sin nt.$$

这样，我们得到的结果与在例题1中用常数变易法得到的相同.

习 题 4.5

1. 设 $u(x)$和 $v(x)$分别是微分方程式

   $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 和 $y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$

   的解，则 $y=u(x)+v(x)$是微分方程式

   $$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)+g(x)$$

   的解.

2. 用常数变易法求解 $y''+a^2y=f(t)$（常数 $a>0$）.

3. 求解下列方程：

   (1) $y''+y'-2y=2x$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;

   (2) $2y''-4y'-6y=3e^{2x}$;

   (3) $y''+4y=x^2+3e^{x}$; $y(0)=0$, $y'(0)=2$;

   (4) $y''+2y'=3+4\sin 2x$;

   (5) $y''+9y=x^2\cdot e^{3x}+6$;

   (6) $y''+y'+y=\sin^2 x$;

   (7) $y''-y'-2y=\cosh 2x$. ［提示：利用 $\cosh x=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$.］

第四章小结

这一章的内容对于普通物理和力学的学习是很有帮助的．对于各节的内容，要求重点掌握：

1．通过具体的例题和习题，能够熟练地求解方程 $y''=F(y)$ 与 $y''=F(y, y')$（至少能降一阶）；

2．了解关于微分方程“线性化”的目的和意义．能够叙述二阶线性微分方程式的初值问题及其解的存在与唯一性定理．这里特别要注意解的存在区间不是局部的；

3．齐次线性微分方程式的解满足迭加原理．线性无（相）关性和伏朗斯基行列式的关系．基本解组和通解的结构．掌握怎样从已知一个非零的特解求通解．

4．常系数线性齐次微分方程的求解法，能够根据特征根是实根、复根以及重根的各种情况分别写出所需的解．讨论弹簧振动的解在什么情况是周期的，或衰减振荡的，或不振荡的．

5．熟练地推导常数变易法的全过程，并且能领会这方法的要点．通过具体的例题和习题，能够根据强迫函数的特点，利用待定系数法求解常系数线性非齐次方程．能够讨论什么时候会出现共振，什么时候则不出现．

第五章

二阶线性微分方程的级数解法

在上一章中，我们介绍了关于常系数线性微分方程式的求解法．本章要讨论关于变系数线性二阶微分方程式的求解法．下面只讨论齐次方程

$$A(x)y''+B(x)y'+C(x)y=0 \tag{1}$$

的解法；关于非齐次方程的解法其实是一样的．在数学物理中有一大类问题归结到求解形状如(1)的方程，其中系数函数 $A(x)$, $B(x)$和 $C(x)$都是 x 的多项式．因此，我们在下面假定方程(1)的系数函数都是多项式，虽然下面的解法对于系数函数为一般的幂级数的方程也是可行的．

如果系数多项式有公因子$(x-x_0)$，那么我们不妨设在方程(1)中已把这种公因子消去了．如果 $A(x_0)\neq 0$，那么在点 x_0 附近 $A(x)\neq 0$，因此方程(1)可以写成如下形式

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0, \tag{2}$$

其中系数函数

$$p(x)=B(x)/A(x), \quad q(x)=C(x)/A(x)$$

在点 x_0 附近是连续的．这时我们可以在点 x_0 利用解的存在和唯一性定理，即对于任何给定的初始条件

$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y'_0, \tag{3}$$

初值问题(2)+(3)的解是存在和唯一的．我们称这样的点 x_0 为微分方程(1)的**常点**．如果 $A(x_0)=0$，则 $B(x_0)$和 $C(x_0)$至少有一个不等于零．因此，$p(x)$和 $q(x)$至少有一个在点 x_0 是不连续的(事实上，$|p(x_0)|$ 或 $|q(x_0)|$ 等于 ∞)．这时，关

于初值问题(2)+(3)的解是否存在，我们是不知道的．这样的点 x_0 称为微分方程(1)的奇点．

这一章的主要内容是，首先介绍方程(1)在常点邻域内的幂级数解法，而且重点讨论勒让德方程和勒让德多项式；其次介绍方程(1)在奇点邻域内的广义幂级数解法，而且重点讨论贝塞耳方程和贝塞耳函数．这些内容对于进一步学习数理方程是不可缺少的．

为了方便读者，我们在第一节中列举有关幂级数的一些基本事实．

第一节 幂级数复习

下列形式的级数

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots \quad (1)$$

称为幂级数．有时把(1)简记为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

现在，我们列举有关幂级数的一些熟知的事实：

1．如果在点 x，极限

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m} a_n(x-x_0)^n$$

存在，则称幂级数(1)在点 x 收敛；否则，称幂级数(1)在点 x 发散．显然，幂级数(1)在点 x_0 总是收敛的；它也可能对于所有的 x 都收敛，或对于所有 $x\neq x_0$ 都发散，或对于某些 x 收敛，而对于另一些 x 则发散．

2．如果级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$$

在点 x 收敛，那么就说级数(1)在点 x 绝对收敛. 可以证明，如果(1)是绝对收敛的，则它一定是收敛的；但反过来的结论不一定成立.

3. 关于检验幂级数(1)的绝对收敛性，最有用的方法是达兰倍尔法：如果对于固定的 x，极限

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right|=l,$$

那么当 $l<1$ 时，幂级数(1)在点 x 是绝对收敛的，而当 $l>1$ 时，则是发散的. 这个判别法当 $l=1$ 时失效.

4. 如果幂级数(1)在点 x_1 收敛，那么对于一切满足 $|x-x_0|<|x_1-x_0|$ 的点 x，幂级数(1)是绝对收敛的；如果它在点 x_1 发散，那么它对于一切 $|x-x_0|>|x_1-x_0|$ 也发散.

5. 存在一个数 R，叫作幂级数(1)的收敛半径，使得当 $|x-x_0|<R$ 时，幂级数(1)是收敛的，而当 $|x-x_0|>R$ 时，它是发散的. 对于一切 x 都收敛的幂级数，我们定义 $R=\infty$；而对于只在点 x_0 收敛的幂级数，我们令 $R=0$. 因此，幂级数(1)的收敛范围只有三种可能：① 一个点 x_0；② 一个以 x_0 为中心的有界区间 J；③ 整个 x 轴. 至于 ②，幂级数在 J 的各个端点可能收敛也可能发散.

下面我们设当 $|x-x_0|<R$ 时，幂级数(1)收敛到 $f(x)$，那么下列结论是对的.

6. 幂级数(1)是函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒级数，即

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

7. 函数 $f(x)$ 在收敛区间 $|x-x_0|<R$ 上是连续的，而且它有各阶的连续导数. 还有，幂级数(1)可以逐项微分，即

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1}$$

等等.

又设幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$$

当 $|x-x_0|<R$ 时,收敛到 $g(x)$,则当 $|x-x_0|<R$ 时,下面的结论是成立的:

8. 幂级数可逐项相加或相减,即

$$f(x)\pm g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)(x-x_0)^n.$$

9. 幂级数的相乘,即

$$f(x)\cdot g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n,$$

其中

$$c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0.$$

10. 如果 $f(x)\equiv g(x)$, 即

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\equiv\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n,$$

那么 $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, $\cdots$, $a_n=b_n$, $\cdots$; 特别地,若

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\equiv 0,$$

则 $a_0=a_1=\cdots=a_n=\cdots=0$.

习 题 5·1

1. 确定下列幂级数的收敛半径:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}(x-3)^n$;　　(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^n$;

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$ $(0!=1)$;　　(4) $\sum_{n=0}^{\infty}2^nx^n$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n^2}$;　　(6) $\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n$.

2. 确定下列函数在点 x_0 处的泰勒级数,同时确定它们的收敛半径:

(1) $\sin x$, $x_0=0$;　(2) e^x, $x_0=0$;

(3) x, $x_0=1$;　(4) x^2, $x_0=-1$;

(5) $\log x$, $x_0=1$;　(6) $\dfrac{1}{1+x}$, $x_0=0$;

(7) $\dfrac{1}{1-x}$, $x_0=0$;　(8) $\dfrac{1}{1-x}$, $x_0=2$.

3. 设 $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. 试计算 y' 和 y'', 并且写出各级数的前四项以及一般项 x^n 的系数. 如果 $y''=y$, 那么 $a_{n+2}=a_n/(n+2)(n+1)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$. 因此, 当 a_0 和 a_1 给定后, 就唯一地确定 $y(x)$.

第二节　幂级数解法

设微分方程式为

$$A(x)y''+B(x)y'+C(x)y=0, \tag{1}$$

其中系数函数 $A(x)$, $B(x)$和 $C(x)$是 x 的多项式, 而且设 $A(x_0)\neq 0$, 即点 x_0 是方程(1)的一个常点. 因此,对于任何给定的初值 $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$, 方程(1)有并且只有一个解 $y=y(x)$满足该初值.

我们要寻找方程(1)的如下形式的幂级数解

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n. \tag{2}$$

这里需要讨论两个问题: 首先, 如果幂级数(2)在形式上满足方程(1), 那么是否能够确定(2)中的系数 a_n? 如果能够确定系数 a_n, 那么幂级数(2)是否收敛? 它的收敛半径是什么? 如果我们能够证明, 这样确定的形式幂级数解(2)当 $|x-x_0|<R$ 时是收敛的, 那么它确实是方程(1)的解.

我们先来讨论几个具体的重要例子.

【例题 1】 用幂级数方法求解埃莱(Airy)方程

$$y''=xy \quad (-\infty<x<\infty). \tag{3}$$

对于这个方程，显然 $A(x)=1,\ B(x)=0,\ C(x)=-x$. 因此，$x=0$ 是一个常点. 设方程(3)有形式幂级数解

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n. \tag{4}$$

对(4)式进行逐项微分，得

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n,$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.$$

因为我们是在并不知道幂级数(4)是否收敛的情况下进行逐项微分的，所以这种运算只有形式上的意义.

然后，我们将上述 y 和 y'' 的形式幂级数代入方程(3)，就得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n=x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n-1}x^n \quad (令\ a_{-1}=0).$$

因此，就得递推公式

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}=a_{n-1} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{5}$$

或

$$2a_2=0,$$

$$3\cdot 2a_3=a_0,$$

$$4\cdot 3a_4=a_1,$$

$$5\cdot 4a_5=a_2,$$

$$6\cdot 5a_6=a_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由此可以推出，$a_2=a_5=a_8=\cdots=a_{3n+2}=\cdots=0$; 而 a_0 确定 a_3，从而确定 $a_6,\ a_9,\ \cdots,\ a_{3n},\ \cdots$，而且易知

$$a_3=\frac{a_0}{3\cdot 2},\quad a_6=\frac{a_0}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2},\quad a_9=\frac{a_0}{9\cdot 8\cdot 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2},$$

$$\cdots,\ a_{3n}=\frac{a_0}{(3n)(3n-1)(3n-3)(3n-4)\cdots 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2},\ \cdots;$$

同样，a_1 确定了 a_4，从而确定了 a_7, a_{10}, $\cdots$，而且易知

$$a_4=\frac{a_1}{4\cdot 3},\quad a_7=\frac{a_1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3},\quad a_{10}=\frac{a_1}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3},$$

$$\cdots,\ a_{3n+1}=\frac{a_1}{(3n+1)(3n)(3n-2)(3n-3)\cdots 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3},\ \cdots$$

所以我们得到埃莱方程(3)的形式幂级数解为

$$y=a_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)(3n-1)\cdots 3\cdot 2}\right]+a_1\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{(3n+1)(3n)\cdots 4\cdot 3}\right]. \tag{6}$$

易知幂级数(6)对任何的 x 都是收敛的，所以我们对它可以逐项微分，这样，上述形式步骤也是实际成立的．因此，(6)就是埃莱方程(3)的收敛的幂级数解．注意，在(6)中包含两个任意常数 a_0 和 a_1．这与二阶齐次线性微分方程通解的结构 $[y=a_0\varphi(x)+a_1\psi(x)]$ 是完全一致的．而且，由(6)得

$$y(0)=a_0,\quad y'(0)=a_1,$$

即任意常数 a_0 和 a_1 可以由初始条件 $y(0)=y_0$, $y'(0)=y_0'$ 来确定（即 $a_0=y_0$ 和 $a_1=y_0'$）．

【例题 2】 求埃莱方程(3)在 $x=1$ 处展开的幂级数解，即

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n. \tag{7}$$

此时，我们首先要把方程(3)的系数函数在 $x=1$ 处展开成幂级数，即得

$$y''=[1+(x-1)]y. \tag{8}$$

由(7)，在形式上得

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n. \tag{9}$$

再把(7)和(9)代入方程(8)，即得

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n \\
&\quad=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^{n+1} \\
&\quad=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}(x-1)^n \\
&\quad=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n-1})(x-1)^n.
\end{aligned}$$

由此比较系数，我们得到递推公式

$$\begin{aligned}
2a_2&=a_0,\\
3\cdot 2a_3&=a_1+a_0,\\
4\cdot 3a_4&=a_2+a_1,\\
5\cdot 4a_5&=a_3+a_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(n+2)(n+1)a_{n+2}&=a_n+a_{n-1}, \qquad (10)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

如果给定 a_0 和 a_1，则由此递推公式得到

$$\begin{aligned}
a_2&=\frac{a_0}{2},\\
a_3&=\frac{a_1}{6}+\frac{a_0}{6},\\
a_4&=\frac{a_2}{12}+\frac{a_1}{12}=\frac{a_0}{24}+\frac{a_1}{12},\\
a_5&=\frac{a_3}{20}+\frac{a_2}{20}=\frac{a_0}{30}+\frac{a_1}{120},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

因此得到

$$y=a_0\left[1+\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{(x-1)^3}{6}+\frac{(x-1)^4}{24}+\frac{(x-1)^5}{30}+\cdots\right]$$

$$+a_1\left[(x-1)+\frac{(x-1)^3}{6}+\frac{(x-1)^4}{12}+\frac{(x-1)^5}{120}+\cdots\right], \tag{11}$$

易知，它是收敛的幂级数．因此，(11)就是所求的幂级数解．

一般说来，当递推公式包含三项或三项以上时[例如递推公式(10)]，要象例题1中那样明确地写出 a_n 的表达式是有困难的．因此，我们在(11)式中未能写出它的一般项．

【例题 3】 求解埃尔米特(Hermite)方程

$$y''-2xy'+\lambda y=0 \quad (-\infty<x<\infty), \tag{12}$$

其中 λ 是常数．

易知 $x=0$ 是方程(12)的一个常点．设方程(12)在 $x=0$ 处展开的幂级数解为

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n. \tag{13}$$

把它形式地代入方程(12)，得

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=1}^{\infty}2n\,a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}\lambda a_nx^n=0,$$

或

$$(2a_2+\lambda a_0)+(3\cdot 2a_3-2a_1+\lambda a_1)x$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-2na_n+\lambda a_n]x^n=0.$$

由此我们得到递推公式

$$a_2=-\frac{\lambda a_0}{2}, \quad a_3=\frac{(2-\lambda)a_1}{3\cdot 2},$$

………………

$$a_{n+2}=\frac{2n-\lambda}{(n+2)(n+1)}a_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

这样，a_0 确定 a_2，从而确定 a_4，a_6，…；而 a_1 确定 a_3，从而确定 a_5，a_7，…. 我们容易算得

$$y=a_0\left[1-\frac{\lambda}{2!}x^2-\frac{(4-\lambda)\lambda}{4!}x^4-\frac{(8-\lambda)(4-\lambda)\lambda}{6!}x^6-\cdots\right]$$

$$+a_1\left[x+\frac{(2-\lambda)}{3!}x^3+\frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}x^5+\frac{(10-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)}{7!}x^7+\cdots\right]$$

是方程(12)的收敛的幂级数解. 而且，当 λ 是非负的偶整数时，从上式可以看到，埃尔米特方程(12)有一个多项式解. 例如，当 $\lambda=0,2,4$ 和 6 时，相应的多项式解分别为 1, x, $1-2x^2$ 和 $x-\frac{2}{3}x^3$. 对应于 $\lambda=2n$ 的多项式解乘以适当的常数后，就是有名的埃尔米特多项式 $H_n(x)$.

【例题 4】 求解勒让德方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0, \tag{14}$$

其中 n 是常数.

易知 $x=0$ 是勒让德方程的一个常点. 我们设方程(14)有下面形式的幂级数解

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k. \tag{15}$$

为了便于把级数(15)代入方程(14)，我们首先计算

$$n(n+1)y=\sum_{k=0}^{\infty}n(n+1)c_kx^k,$$

$$-2xy'=\sum_{k=0}^{\infty}(-2kc_k)x^k,$$

$$y''=\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k,$$

$$-x^2y''=\sum_{k=0}^{\infty}[-k(k-1)c_k]x^k,$$

再把它们分别代入方程(14)中的相应位置，容易推出

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+2)(k+1)c_{k+2}+(n+k+1)(n-k)c_k]x^k=0.$$

从而我们得到递推公式

$$2\cdot 1c_2+n(n+1)c_0=0,$$

$$3\cdot 2c_3+(n-1)(n+2)c_1=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(k+2)(k+1)c_{k+2}+(n-k)(n+k+1)c_k=0, \qquad (16)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

不难从递推公式(16)推出

$$c_{2m}=(-1)^m \times\frac{(n-2m+2)\cdots(n-2)n(n+1)(n+3)\cdots(n+2m-1)}{(2m)!}c_0$$

和

$$c_{2m+1}=(-1)^m \times\frac{(n-2m+1)\cdots(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)\cdots(n+2m)}{(2m+1)!}c_1$$

$$(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

因此，我们得到勒让德方程的幂级数解

$$y=c_0\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\right.$$

$$\left.\times\frac{(n-2k+2)\cdots(n-2)n(n+1)(n+3)\cdots(n+2k-1)}{(2k)!}x^{2k}\right]$$

$$+c_1\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$$

$$\times\frac{(n-2k+1)\cdots(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)\cdots(n+2k)}{(2k+1)!}$$

$$\times x^{2k+1}. \tag{17}$$

由(16)可见，幂级数解(17)当 $|x|<1$ 时是收敛的．注意，$x=\pm1$ 是方程(14)的两个奇点．可以猜测，在(17)式中，当 $x\to\pm1$ 时，y 的变化是比较复杂的．当 n 是非负的整数时，我们将在下一节比较详细地讨论勒让德方程(14)的幂级数解(17)．

作为本节的结束，我们对一般形式的微分方程(1)叙述一个命题．

命题　设微分方程(1)，或

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0, \tag{18}$$

其中系数函数

$$p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(x-x_0)^n;\quad q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(x-x_0)^n,$$

当 $|x-x_0|<r$ 时收敛，则方程(18)有收敛的幂级数解

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n\quad(|x-x_0|<r), \tag{19}$$

其中 c_0 和 c_1 是两个任意常数，它们依次由一个递推公式确定 c_n $(n\geqslant2)$．

习　题　5·2

1．对于下列微分方程式求解两个线性无关的在 $x=x_0$ 点展开的幂级

数解，并写出相应的递推公式：

(1) $y''-y=0,\quad x_0=0$;

(2) $y''-xy'-y=0,\quad x_0=0$;

(3) $y''-xy'-y=0,\quad x_0=1$;

(4) $(1-x)y''+y=0,\quad x_0=0$.

2. 对于下列初值问题求出 $y''(x_0)$, $y'''(x_0)$ 和 $y^{(4)}(x_0)$，从而写出相应初值问题的解在 x_0 点的泰勒展开的前几项：

(1) $y''+xy'+y=0;\ y(0)=1,\quad y'(0)=0$;

(2) $y''+(\sin x)y'+(\cos x)y=0;\ y(0)=0,\quad y'(0)=1$;

(3) $x^2y''+(1+x)y'+3(\log x)y=0;\ y(1)=2,\quad y'(1)=0$.

3. 求微分方程 $y''+(\sin x)y=0$ 在 $x=0$ 处展开的两个线性无关的幂级数解. $\left[\text{提示: } \sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.\right]$

第三节　勒让德多项式

在上一节的例题 4 中，我们已经求得勒让德方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0 \tag{1}$$

的幂级数解为

$$\begin{aligned}y=c_0\Big[1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\\ \times\frac{(n-2k+2)\cdots(n-2)n(n+1)(n+3)\cdots(n+2k-1)}{(2k)!}x^{2k}\Big]\\ +c_1\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\\ \times\frac{(n-2k+1)\cdots(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)\cdots(n+2k)}{(2k+1)!}\\ \times x^{2k+1},\end{aligned} \tag{2}$$

其中 c_0 与 c_1 是两个任意常数.

特别，令 $c_0=1$, $c_1=0$, 则有

$$y_1 = 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \cdots, \tag{3}$$

若令 $c_0=0$, $c_1=1$, 则有

$$y_2 = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \cdots. \tag{4}$$

显然，这 y_1 和 y_2 是方程(1)的两个线性无关的解. 而且由公式(3)和(4)可见，当 n(设 $n \geqslant 0$)是偶数时，则 $y_1 = P_n(x)$是一个 n 次的多项式; 当 n 是奇数时，则 $y_2 = P_n(x)$是一个 n 次的多项式. 总之，当 n 是非负的整数时，勒让德方程(1)有一个多项式解 $y = cP_n(x)$, 其中 c 是任意的非零常数. 除了一个常数因子外，可以直接验证

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}. \tag{5}$$

这里$\left[\frac{n}{2}\right]$表示 $\frac{n}{2}$ 的整数部分($n=0, 1, 2, \cdots$).

由公式(5)表达的多项式 $P_n(x)$叫作*勒让德多项式*. 这种多项式在数学物理方法中有重要的应用，因此我们要稍作详细的讨论.

由公式(5)，可以明显地写出

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),$$

$$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x),$$

等等，而且易知

$$P_n(-x)=(-1)^n P_n(x).$$

因此，$P_0(x)$，$P_2(x)$，$P_4(x)$，… 都是偶函数；$P_1(x)$，$P_3(x)$，$P_5(x)$，… 都是奇函数.

下面我们证明有关勒让德多项式的几个有用的公式：

1. 罗德里格斯(Rodrigues)公式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n].$$

事实上，由公式(5)推出

$$\begin{aligned}P_n(x)&=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}\\&=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}x^{2n-2k}\\&=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}x^{2n-2k}\\&=\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!}(x^2)^{n-k}\\&=\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n],\end{aligned}$$

即得罗德里格斯公式的证明. ▌

由罗德里格斯公式不难推出：$P_n(1)=1$；从而

$$P_n(-1)=(-1)^n.$$

2. 正交性　勒让德多项式系 $\{P_n(x)\}$ 在区间 $[-1, 1]$ 上是正交的，即

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\cdot P_m(x)dx=\begin{cases}0, & \text{当 } m\neq n;\\ \text{正数}, & \text{当 } m=n.\end{cases}$$

事实上，由于勒让德多项式是勒让德方程的解，所以有

$$(1-x^2)P_n''(x)-2xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x)=0 \tag{6}$$

和

$$(1-x^2)P_m''(x)-2xP_m'(x)+m(m+1)P_m(x)=0. \tag{7}$$

用 $P_m(x)$ 和 $P_n(x)$ 分别乘(6)式和(7)式，然后相减，即得

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)(P_mP_n'-P_nP_m')]=(m-n)(m+n+1)P_mP_n.$$

再对此式进行积分，得到

$$(m-n)(m+n+1)\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx$$
$$=[(1-x^2)(P_mP_n'-P_nP_m')]_{x=-1}^{x=1}=0.$$

所以当 $m\neq n$ 时，由此推出

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\cdot P_n(x)dx=0.$$

另一方面，由于 $P_n(x)$ 是一个实系数的 n 次多项式，所以除了有限个零点外，$[P_n(x)]^2>0$. 因此，当 $m=n$ 时，

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\cdot P_n(x)dx=\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2dx>0;$$

即得正交性的证明. ▌

下面我们还可以进一步算出积分

$$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2dx=\frac{2}{2n+1}. \tag{8}$$

为此，令

$$u=(x^2-1)^n,\quad u^{(s)}=\frac{d^su}{dx^s},$$

则罗德里格斯公式变为

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}u^{(n)}.$$

因此，逐次利用分部积分法，得

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2dx&=\frac{1}{(2^n\cdot n!)^2}\int_{-1}^{1}u^{(n)}u^{(n)}dx\\&=\frac{-1}{(2^n\cdot n!)^2}\int_{-1}^{1}u^{(n+1)}u^{(n-1)}dx\\&=\frac{(-1)^k}{(2^n\cdot n!)^2}\int_{-1}^{1}u^{(n+k)}u^{(n-k)}dx\\&=\frac{(-1)^n}{(2^n\cdot n!)^2}\int_{-1}^{1}u^{(2n)}udx\\&=\frac{(-1)^n(2n)!}{(2^n\cdot n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^ndx\\&=\frac{(2n)!}{(2^n\cdot n!)^2}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!(2n+1)}\cdot 2^{2n+1}\\&=\frac{2}{2n+1},\end{aligned}$$

即得公式(8).

上面已经证明了勒让德多项式系在区间 $[-1, 1]$ 上组成一个正交系. 因此仿照傅里叶(Fourier)级数的理论，可以讨论函数 $f(x)$ 关于勒让德多项式系 $\{P_n(x)\}$ 的展开问题.

3. 广义傅里叶级数　设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上可积，作 $f(x)$ 关于 $P_n(x)$ 的广义傅里叶系数

$$a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx,$$

则称级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(x) \tag{9}$$

为函数 $f(x)$ 的广义傅里叶级数，记作：

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(x). \tag{10}$$

广义傅里叶级数(9)不一定收敛；即使它是收敛的，也不

见得收敛到 $f(x)$. 因此我们在(10)式中没有划等号. 但是，如果 $f(x)$ 满足狄利克莱 (Dirichlet) 条件，那么级数(9)就收敛到函数 $f(x)$，即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(x),$$

关于这个结论的证明由于篇幅所限，只好从略了.

最后，我们来考虑勒让德方程的另一个与 $P_n(x)$ 线性无关的解. 由第四章第三节中的公式(18)可见，勒让德方程的通解为

$$y=c_1P_n(x)+c_2Q_n(x),$$

其中 c_1 和 c_2 是任意常数，而且

$$Q_n(x)=P_n(x)\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{(1-x^2)[P_n(x)]^2}.$$

因为 $P_n(1)=1$，所以可取 $x_0(0<x_0<1)$，使得当 $x_0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$\frac{1}{2}\leqslant P_n(x)\leqslant 2.$$

因此，当 $x_0\leqslant x<1$ 时，得到

$$Q_n(x)\geqslant\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{(1-x^2)2^2}$$

$$=\frac{1}{16}\left(\log\frac{1+x}{1-x}-\log\frac{1+x_0}{1-x_0}\right).$$

此不等式的右端当 $x\to 1$ 时趋于 $+\infty$，所以得到

$$\lim_{x\to 1^-}Q_n(x)=+\infty.$$

这就证明了勒让德方程的另一个与 $P_n(x)$ 线性无关的解当 $x\to 1^-$ 时是无界的.

习　题　5.3

1. 令母函数

$$G(x,\ t)=(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}},$$

则 $G(x, t)$ 关于 t 展开的幂级数为

$$G(x, t)=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n,$$

其中 $P_n(x)$ 是勒让德多项式.

2. 利用恒等式

$$(1-2xt+t^2)\frac{\partial G}{\partial t}=(x-t)G,$$

证明递推公式

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0 \quad (n\geqslant 1).$$

第四节　广义幂级数解法

在这一节中，我们将讨论微分方程式

$$A(x)y''+B(x)y'+C(x)y=0 \tag{1}$$

在奇点 x_0 的一个邻域内的求解问题. 这里 $A(x)$, $B(x)$ 和 $C(x)$ 都是 x 的多项式，而且它们没有公因子. 因为 x_0 是方程(1)的一个奇点，所以 $A(x_0)=0$. 因此，$A(x)$ 含有因子 $(x-x_0)^k$ $(k\geqslant 1)$，而 $B(x)$ 或 $C(x)$ 就不含因子 $(x-x_0)$，亦即 $B(x_0)\neq 0$ 或 $C(x_0)\neq 0$. 我们开头就说过，对微分方程(1)在奇点 x_0 上是不能随意提初值问题的.

【例题 1】 讨论微分方程

$$x^2y''-2y=0. \tag{2}$$

显然，$x=0$ 是微分方程(2)的一个奇点；而对于任何

$$x=x_0\neq 0$$

都是方程(2)的常点.

容易验证 $y=x^2$ $(-\infty<x<\infty)$ 是方程 (2) 的一个解. 同样可以验证 $y=\dfrac{1}{x}(x\neq 0)$ 是方程(2)的另一个线性无关的解. 所以当 $x\neq 0$ 时，方程(2)的通解为

$$y=c_1x^2+\frac{c_2}{x}.$$

由此可见，方程(2)当 $x\to 0$ 时的有界解只可能是

$$y=c_1x^2\quad(c_1\text{ 是任意常数}),$$

它们都满足 $y(0)=0,\ y'(0)=0$. 因此，方程(2)不可能有满足 $y(0)=1,\ y'(0)=0$ 的解. 这就表明，对方程(2)在奇点 $x=0$ 上是不可能随意提初值问题的. 另外，方程(2)的另一个解 $y=\frac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时是无界的，从而它在 $x=0$ 处不能展开成泰勒级数(即普通的幂级数). 这样一来，我们就不能在奇点 $x=0$ 的邻域内用第二节中所讲的幂级数方法$\left(\text{即令 } y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right)$来求解方程(2)了.

【例题 2】 讨论微分方程

$$x^2y''-2xy'+2y=0. \tag{3}$$

显然，方程(3)也以 $x=0$ 为唯一的奇点. 方程(3)与方程(2)一样是欧拉方程，所以我们不难求得它的通解

$$y=c_1x+c_2x^2. \tag{4}$$

由此可见，方程(3)的任何解在奇点 $x=0$ 的邻域内都是有界的，而且满足 $y(0)=0$. 因此，对于方程(3)我们就不能提 $y(0)\neq 0$ 的要求. 注意，方程(3)的通解(4)在奇点 $x=0$ 处却是普通的幂级数.

【例题 3】 讨论微分方程

$$x^2y''+(3x-1)y'+y=0. \tag{5}$$

方程(5)也以 $x=0$ 为唯一的奇点. 设此方程有下列幂级数解

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\quad(c_0\neq 0),$$

代入方程，推出一个递推公式

$$c_{n+1}=(n+1)c_n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

由此得到

$$c_{n+1}=(n+1)!c_0.$$

所以我们得到方程(5)的一个形式幂级数解

$$y=c_0\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n,$$

易知这幂级数是发散的(只要 $x\neq 0$).

这例子又表明，我们不能在奇点用普通的幂级数求解.

【例题 4】 讨论微分方程

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0. \tag{6}$$

方程(6)也以 $x=0$ 为唯一的奇点. 令

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}}u,$$

则 $u=u(x)$ 满足

$$u''+u=0,$$

它有两个线性无关的解

$$u_1=\sin x \quad 和 \quad u_2=\cos x.$$

因此，我们得到方程(6)的两个线性无关的解

$$y_1=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+\frac{1}{2}} \tag{7}$$

和

$$y_2=\frac{\cos x}{\sqrt{x}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k-\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

我们注意到，(7)和(8)都不是普通意义下的幂级数，它们属于以下形式的广义幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^{n+\rho} \quad (c_0\neq 0), \tag{9}$$

其中常数 ρ 叫作指标. 例如，(7)是一个广义的幂级数，对应

于 $x_0=0$ 和指标 $\rho=\frac{1}{2}$；(8)也是一个广义的幂级数，对应于 $x_0=0$ 和指标 $\rho=-\frac{1}{2}$.

因此可以说，方程(6)有两个线性无关的广义幂级数解．我们希望找出某种具有一般性的结论．

【例题5】 求解贝塞耳方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0, \tag{10}$$

其中常数 $n\geqslant 0$.

我们看到，当 $n=\frac{1}{2}$ 时，方程(10)就是(6)．所以我们猜测方程(10)有广义的幂级数解

$$y=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\rho} \quad (c_0\neq 0), \tag{11}$$

其中系数 $c_k(k\geqslant 1)$和指标 ρ 待定．为了把(11)式代入方程(10)，我们先计算出

$$-n^2y=\sum_{k=0}^{\infty}(-n^2c_k)x^{k+\rho},$$

$$x^2y=\sum_{k=0}^{\infty}c_{k-2}x^{k+\rho} \quad (令\ c_{-2}=c_{-1}=0),$$

$$xy'=\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)c_kx^{k+\rho},$$

$$x^2y''=\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)(k+\rho-1)c_kx^{k+\rho}.$$

再把它们代入方程(10)中相应的位置，推得

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(\rho+n+k)(\rho-n+k)c_k+c_{k-2}]x^{k+\rho}=0.$$

由此可见，这等式中各项的系数都应等于零，即

$$\left.\begin{aligned}(\rho+n)(\rho-n)c_0=0,\\(\rho+n+1)(\rho-n+1)c_1=0,\\(\rho+n+2)(\rho-n+2)c_2+c_0=0,\\(\rho+n+3)(\rho-n+3)c_3+c_1=0,\\(\rho+n+4)(\rho-n+4)c_4+c_2=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(\rho+n+k)(\rho-n+k)c_k+c_{k-2}=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

它是一个递推公式. 由于已设 $c_0\neq0$, 所以由(12)的第一式推出

$$(\rho+n)(\rho-n)=0.\tag{13}$$

它叫作指标方程. 由指标方程(13)确定两个指标根

$$\rho_1=n \quad 和 \quad \rho_2=-n.$$

对应于指标根 $\rho=\rho_1=n$, 在递推公式(12)中的一般项为

$$(2n+k)kc_k+c_{k-2}=0 \quad (k\geqslant1),$$

其中 c_k 的系数为 $(2n+k)k\neq0$, 因此可以依次确定 c_k.

由(12)中的第二式, 即

$$(2n+1)c_1=0,$$

推出 $c_1=0$; 然后由第四, 第六, …等分别推出 $c_3=0, c_5=0,\cdots, c_{2k+1}=0, \cdots$.

再由(12)中的第三式, 第五式, …等分别推出

$$c_2=\frac{-1}{2^2(n+1)}c_0,$$

$$c_4=\frac{1}{2^4(n+1)(n+2)2!}c_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{2k}(n+1)(n+2)\cdots(n+k)k!}c_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

利用 Γ 函数的记号和公式

$$\Gamma(n+k+1)=(n+k)\cdots(n+2)(n+1)\Gamma(n+1),$$

$$\Gamma(k+1)=k!,$$

我们可以把上述 c_{2k} 的表达式写成

$$c_{2k}=\frac{(-1)^k\Gamma(n+1)}{2^{2k}\Gamma(n+k+1)\Gamma(k+1)}c_0.$$

为了标准化，我们取

$$c_0=\frac{1}{2^n\Gamma(n+1)},$$

则
$$c_{2k}=\frac{(-1)^k}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(k+1)}\cdot\frac{1}{2^{2k+n}}.$$

因此，对应于指标根 $\rho_1=n$，我们得到贝塞耳方程(10)的一个形式广义幂级数解

$$y=J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}. \qquad (14)$$

易知，对任何 x，广义幂级数(14)是收敛的．而且当 $x\neq0$ 时，对它可以逐项微分．这样，上面的形式程序都是合理的．因此，$y=J_n(x)$ 是贝塞耳方程的一个(真正的)解，它叫作**第一类贝塞耳函数**．

对应于指标根 $\rho=\rho_2=-n$，则递推公式(12)的一般项为

$$k(k-2n)c_k+c_{k-2}=0 \quad (k\geqslant1). \qquad (15)$$

可分两种情况进行讨论：

(一) $2n$ 不等于任何整数

此时在(15)中 c_k 的系数 $k(k-2n)\neq0$．类似于上述对应于 $\rho=\rho_1=n$ 的情形一样，我们可以由(15)确定

$$c_1=c_2=c_3=\cdots=c_{2k+1}=\cdots=0$$

以及
$$c_{2k}=\frac{(-1)^k\Gamma(-n+1)}{2^{2k}\Gamma(-n+k+1)\Gamma(k+1)}c_0.$$

令
$$c_0=\frac{1}{2^{-n}\Gamma(-n+1)},$$
因此，当 $2n$ 不是整数时，我们得到贝塞耳方程的另一个解
$$y=J_{-n}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(-n+k+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}, \quad (16)$$
它叫作第二类贝塞耳函数．注意，当 $n>0$ 时，由(16)可见第二类贝塞耳函数 $J_{-n}(x)$ 当 $x\to 0$ 时，是无界的．这就是说，这时贝塞耳方程在奇点 $x=0$ 的邻域内有一个无界的解．

（二）$2n$ 等于某个整数 N

此时，若用(15)去定 c_N，将发生困难，即 c_N 的系数等于零．这时，我们又可分两种情形进行讨论：

1）当 $2n$ 等于一个奇数 $2s+1$，即 n 为半整数时，由(15)可见，当 k 为偶数时，c_k 的系数 $k(k-2n)\neq 0$．因此与上面一样，我们可以确定
$$c_{2k}=\frac{(-1)^k\Gamma(-n+1)}{2^{2k}\Gamma(-n+k+1)\Gamma(k+1)}c_0 \quad (k\geqslant 1).$$
而当 k 为奇数时，若 $k<2s+1$，则 $c_k(k\geqslant 1)$ 的系数 $k(k-2n)$ 也不等于零，所以我们可以确定
$$c_1=0,\ c_3=0,\ \cdots,\ c_{2s-1}=0;$$
若 $k\geqslant 2s+1$，则由(15)得知 c_{2s+1} 的系数为零，而且
$$(2s+1)(-2n+2s+1)c_{2s+1}=0,$$
$$(2s+3)(-2n+2s+3)c_{2s+3}+c_{2s+1}=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
我们只要令 $c_{2s+1}=0$，则 $c_{2s+3}=0$，$c_{2s+5}=0$，…．这样，对应于 $\rho=\rho_2=-n$，我们仍旧可以得到一个广义的幂级数解 $y=J_{-n}(x)$［它的表达式同(16)］．

2）当 $2n$ 等于偶数，即 n 为整数时，我们由(15)推出
$$c_1=c_3=c_5=\cdots=\cdots=0,$$

以及 $$c_2\neq 0,\ \cdots,\ c_{2n-2}\neq 0.$$

而由于

$$2n(2n-2n)c_{2n}+c_{2n-2}=0,$$

又必须 $c_{2n-2}=0$. 这是一个矛盾. 这就说明，当 n 为整数时，对应于指标根 $\rho=\rho_2=-n$, 我们得不到广义的幂级数解. 此时,只能求得一个广义的幂级数解 $y=J_n(x)$.

对于给定的整数 $n\geqslant 0$, 我们取参数 $\alpha\neq n$, 但 α 充分接近 n, 则对应于 α, 有 $J_\alpha(x)$和 $J_{-\alpha}(x)$, 而且

$$y_\alpha(x)=\frac{J_\alpha(x)\cos\alpha\pi-J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi}\quad(\sin\alpha\pi\neq 0)$$

是贝塞耳方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-\alpha^2)y=0$$

的一个解,并且 $y_\alpha(x)$在奇点 $x=0$ 的邻域内是无界的. 令

$$Y_n(x)=\lim_{\alpha\to n}y_\alpha(x),$$

即

$$Y_n(x)=\lim_{\alpha\to n}\frac{J_\alpha(x)\cos\alpha\pi-J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi}.\tag{17}$$

我们可以证明 $y=Y_n(x)$ 是贝塞耳方程(10)的与第一类贝塞耳函数 $J_n(x)$线性无关的一个解.称 $Y_n(x)$为诺曼(Neumann)函数或第二类贝塞耳函数(注意,这时 n 为整数).

由于贝塞耳函数的重要性,在下一节将作较详细的讨论.

我们从上面列举的几个例子看到，在微分方程奇点的邻域内有时可用广义幂级数求解(如例题 1、2、4、5)，有时却不能用(如例题 3). 那么是否可以告诉一个判别的准则呢？请看下面的命题.

命题 设微分方程(1)以 x_0 为正则奇点,即方程(1)可以改写成如下的形式

$$(x-x_0)^2P(x)y''+(x-x_0)Q(x)y'+R(x)y=0,\tag{18}$$

其中 $P(x_0)\neq 0$，$P(x)$、$Q(x)$ 和 $R(x)$ 是多项式(或它们在 $x=x_0$ 处可以展成泰勒级数)，则微分方程(18)有收敛的广义幂级数解

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^{n+\rho}\quad (c_0\neq 0),\tag{19}$$

其中指标 ρ 和系数 $c_n(n\geqslant 1)$ 可以用代入法来确定.

关于这个命题的证明，这里就不细述了，这是因为对于一般的读者来说，广义幂级数解法的最主要的应用是求解贝塞耳方程．而这一点，已经在例题 5 中完成了．在这里叙述的这个命题可以帮助读者理解前面所举的几个例子．例如，例题 1、2、4、5 都以 $x=0$ 为正则奇点，所以它们有广义的幂级数解；而例题 3 却有一个非正则的奇点($x=0$)，它的形式(广义)幂级数解是发散的.

为了帮助读者熟练广义幂级数解法，我们再举一个例子．有兴趣的读者可以进一步去找一些有关常微分方程解析理论的参考书(例如，参考文献[11]).

【例题 6】 求解微分方程

$$2x^2y''-xy'+(1+x)y=0.\tag{20}$$

易知 $x=0$ 是方程(20)的一个正则奇点．因此，我们可以求方程(20)的广义幂级数解

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+\rho}\quad (c_0\neq 0).\tag{21}$$

为了代入的方便，我们先计算出

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+\rho},$$

$$xy=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n-1}x^{n+\rho}\quad (令\ c_{-1}=0),$$

$$-xy'=\sum_{n=0}^{\infty}[-(n+\rho)c_n]x^{n+\rho},$$

$$2x^2y''=\sum_{n=0}^{\infty}2(n+\rho)(n+\rho-1)c_nx^{n+\rho},$$

把它们代入方程(20)，得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{[2(n+\rho)(n+\rho-1)-(n+\rho)+1]c_n$$
$$+c_{n-1}\}x^{n+\rho}=0.$$

从而得到递推公式

$$[2(n+\rho)-1]\cdot[(n+\rho)-1]c_n+c_{n-1}=0.$$

当 $n=0$ 时，我们推出

$$F(\rho)\equiv(2\rho-1)(\rho-1)=0\quad(\text{指标方程}).$$

所以得到两个指标根 $\rho_1=1$ 和 $\rho_2=\frac{1}{2}$ $(\rho_1>\rho_2)$.

对应于 $\rho=\rho_1=1$，有递推公式

$$F(\rho_1+n)c_n+c_{n-1}=0\quad(n\geqslant1).$$

因为 ρ_1 是最大的指标根，所以 $F(\rho_1+k)\neq0$ $(k\geqslant1)$，并且

$$c_n=\frac{-1}{F(\rho_1+n)}c_{n-1}=\frac{1}{F(\rho_1+n)F(\rho_1+n-1)}c_{n-2}$$

………………………………………………………

$$=\frac{(-1)^n}{F(\rho_1+n)F(\rho_1+n-1)\cdots F(\rho_1+1)}c_0.$$

这样，令 $c_0=1$，我们就得到一个广义的幂级数解

$$y=\left[x^{\rho_1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{F(\rho_1+n)F(\rho_1+n-1)\cdots F(\rho_1+1)}x^{n+\rho_1}\right].$$

同样，对应于 $\rho=\rho_2=\frac{1}{2}$，由于 $\rho_2+k\neq\rho_1(k\geqslant1)$，即 $F(\rho_2+k)\neq0(k\geqslant1)$，我们又得到一个广义的幂级数解

$$y_2=\left[x^{\rho_2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{F(\rho_2+n)F(\rho_2+n-1)\cdots F(\rho_2+1)}x^{n+\rho_2}\right].$$

容易用达兰倍尔 (D'Alembert) 法判别上面所得的级数是收敛的. 而且 y_1 与 y_2 显然是线性无关的. 因此, 我们求得方程(20)的通解为

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x).$$

习 题 5·4

1. 试判别 $x=-1, 0, 1$ 是下列微分方程的什么点(常点或正则奇点或非正则奇点)?

   (1) $xy''+(1-x)y'+xy=0$;

   (2) $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$ (勒让德);

   (3) $2x^4(1-x^2)y''+2xy'+3x^2y=0$;

   (4) $x^2(1-x^2)y''+\frac{2}{x}y'+4y=0$;

   (5) $y''+\left(\frac{x}{1+x}\right)^2y'+3(1+x)^2y=0$.

2. 用广义幂级数求解下列微分方程:

   (1) $2xy''+y'+xy=0$;

   (2) $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{9}\right)y=0$;

   (3) $xy''+y=0$;

   (4) $xy''+y'-y=0$.

3. 设超几何方程

$$x(1-x)y''+[\gamma-(1+\alpha+\beta)x]y'-\alpha\beta y=0,$$

   其中 α, β, γ 是常数.

   (1) 证明 $x=0$ 是一个正则奇点, 相应的指标根为

$$\rho_1=0 \quad 和 \quad \rho_2=1-\gamma;$$

   (2) 证明 $x=1$ 也是一个正则奇点, 相应的指标根为

$$\rho_1=0 \quad 和 \quad \rho_2=\gamma-\alpha-\beta;$$

   (3) 设 $1-\gamma$ 不是正整数, 则超几何方程在 $x=0$ 的邻域内有一个解是

$$y_1=1+\frac{\alpha\beta}{\gamma\cdot 1!}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\cdot 2!}x^2+\cdots$$

(超几何级数)，它的收敛半径是什么？

(4) 设 $1-\gamma$ 不是整数，则第二个解为

$$y_2=x^{1-\gamma}\left[1+\frac{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}{(2-\gamma)\cdot 1!}x\right.$$
$$\left.+\frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)}{(2-\gamma)(3-\gamma)\cdot 2!}x^2+\cdots\right].$$

第五节 贝塞耳函数

在上一节中，我们用广义幂级数方法解出了贝塞耳方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0 \tag{1}$$

(常数 $n\geqslant 0$)，并且用它的解定义了两个重要的特殊函数——第一类贝塞耳函数 $y=J_n(x)$[见上一节中的公式(14)]和第二类贝塞耳函数 $y=J_{-n}(x)$ [当 n 不等于整数，见上一节中的公式(16)]或 $y=Y_n(x)$[当 n 等于整数，见上一节中的公式(17)；$Y_n(x)$又名诺曼函数]．而在实际的应用中，主要是 n 为整数的情况．所以我们在下面都假定 n 为整数．通常称 $J_n(x)$为 n 阶贝塞耳函数；而称 $Y_n(x)$为 n 阶诺曼函数．我们在这一节的主要任务是讨论有关 $J_n(x)$和 $Y_n(x)$的某些有用的性质：

1. 渐近式 对于贝塞耳函数 $J_n(x)$，存在常数 $A_n(>0)$ 和 α_n，使得当 $x\to\infty$ 时，有渐近式

$$J_n(x)=\frac{A_n}{\sqrt{x}}[\sin(x+\alpha_n)+o(1)], \tag{2}$$

这里 $o(1)$表示一个无穷小量；同样，对于诺曼函数 $Y_n(x)$，存在常数 $B_n(>0)$和 β_n，使得当 $x\to\infty$ 时，有渐近式

$$Y_n(x)=\frac{B_n}{\sqrt{x}}[\cos(x+\beta_n)+o(1)]. \tag{3}$$

事实上，令

$$u(x)=\sqrt{x}\cdot J_n(x)\quad(x>0),\tag{4}$$

或 $J_n(x)=u(x)/\sqrt{x}$. 代入贝塞耳方程(1),就得到

$$u''(x)+\left(1-\frac{n^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right)u(x)=0.\tag{5}$$

因为 $J_n(x)$是(1)的非零解,所以 $u(x)$也是方程(5)的非零解,从而 $u(x)$和 $u'(x)$不能同时为零(为什么?), 亦即

$$r(x)=\sqrt{[u(x)]^2+[u'(x)]^2}>0.$$

因此,我们可以把 $u(x)$和 $u'(x)$表达成极坐标的形式

$$u(x)=r(x)\sin\theta(x),\quad u'(x)=r(x)\cos\theta(x),\tag{6}$$

由方程(5)可推出

$$r'(x)=\frac{n^2-\frac{1}{4}}{x^2}\,r(x)\sin\theta(x)\cos\theta(x),\tag{7}$$

$$\theta'(x)=1-\frac{n^2-\frac{1}{4}}{x^2}\sin^2\theta(x).\tag{8}$$

由方程(7),得

$$r(x)=r_0e^{\int_1^x\frac{n^2-\frac{1}{4}}{t^2}\sin\theta(t)\cdot\cos\theta(t)dt},\tag{9}$$

其中 $r_0=r(1)>0$. 因为 $|\sin\theta(t)\cdot\cos\theta(t)|\leqslant\frac{1}{2}$,所以积分

$$\int_1^\infty\frac{n^2-\frac{1}{4}}{t^2}\sin\theta(t)\cos\theta(t)dt$$

是收敛的. 因此, 由公式(9)可见, 当 $x\to\infty$ 时, $r(x)$的极限存在,即

$$\lim_{x\to+\infty}r(x)=A_n=r_0e^{\int_1^\infty\frac{n^2-\frac{1}{4}}{t^2}\sin\theta(t)\cos\theta(t)dt}>0,$$

亦即当 $x\to\infty$ 时,得

$$r(x)=A_n+o(1). \tag{10}$$

又令 $\theta(x)=x+\varphi(x)$, 则由方程(8)推出

$$\varphi'(x)=\frac{\frac{1}{4}-n^2}{x^2}\sin^2(x+\varphi(x)),$$

由此积分,即得

$$\varphi(x)-\varphi(1)=\int_1^x\frac{\frac{1}{4}-n^2}{t^2}\sin^2(t+\varphi(x))dt.$$

这等式右边的积分当 $x\to\infty$ 时是收敛的. 因此, $\varphi(x)$ 当 $x\to\infty$ 时有极限. 令

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=\alpha_n,$$

亦即当 $x\to\infty$ 时,有

$$\varphi(x)=\alpha_n+o(1),$$

或 $\theta(x)=x+\alpha_n+o(1)$. 再由(10)和(6),我们得到

$$u(x)=A_n\sin(x+\alpha_n)+o(1) \tag{11}$$

和

$$u'(x)=A_n\cos(x+\alpha_n)+o(1). \tag{12}$$

从而由(4)推出渐近式(2)成立. 另外,由于

$$J_n'(x)=\frac{u'(x)}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{u(x)}{x^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}[u'(x)+o(1)],$$

所以我们还可以从(12)推出 $J_n'(x)$ 的渐近式

$$J_n'(x)=\frac{A_n}{\sqrt{x}}[\cos(x+\alpha_n)+o(1)]. \tag{13}$$

它可以看作是从渐近式(2)直接求导数而来的; 或者说, 我们可以对渐近式(2)求导数.

同样可证渐近式(3)成立,而且对它也可求导数. ▌

由上述渐近式可见, $J_n(x)$ 和 $Y_n(x)$ 都有无穷多个零点.

2. 诺曼函数

$$Y_n(x)=\frac{2}{\pi}J_n(x)\log\frac{x}{2}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\Gamma(n-k)}{\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\psi(k+1)+\psi(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k},\tag{14}$$

其中 $\psi(\xi)=\Gamma'(\xi)/\Gamma(\xi)$.

事实上，由上一节关于 $Y_n(x)$ 的定义，有

$$Y_n(x)=\lim_{\sigma\to n}\frac{J_\sigma(x)\cos\sigma\pi-J_{-\sigma}(x)}{\sin\sigma\pi}\quad(\sigma\neq n).\tag{15}$$

由于

$$J_{-\sigma}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(-\sigma+k+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\sigma},\tag{16}$$

令 $\sigma\to n$，则当 $0\leqslant k\leqslant n-1$ 时，有

$$|\Gamma(-\sigma+k+1)|\to\infty,$$

因此由(16)推出

$$J_{-n}(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(-n+k+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l+n}}{\Gamma(l+1)\Gamma(n+l+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l+n}$$
$$=(-1)^nJ_n(x).$$

另外，又因 $\cos n\pi=(-1)^n$ 和 $\sin n\pi=0$，所以极限式(15)是 0 比 0 的不定形．利用洛必达(L'Hopital)法则，有

$$Y_n(x)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\sigma(x)}{\partial\sigma}-(-1)^n\frac{\partial J_{-\sigma}(x)}{\partial\sigma}\right]_{\sigma=n}.\tag{17}$$

由公式

$$J_\sigma(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(\sigma+k+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\sigma}$$

推出

$$\frac{\partial J_\sigma(x)}{\partial\sigma}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(\sigma+k+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\sigma}\cdot\left[\log\frac{x}{2}-\psi(\sigma+k+1)\right].$$

因此

$$\left[\frac{\partial J_\sigma(x)}{\partial\sigma}\right]_{\sigma=n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}\cdot\left[\log\frac{x}{2}-\psi(n+k+1)\right]. \tag{18}$$

为了计算$\left[\frac{\partial J_{-\sigma}(x)}{\partial\sigma}\right]_{\sigma=n}$，我们把 $J_{-\sigma}(x)$ 分成两部分

$$J_{-\sigma}(x)=\left(\sum_{k=0}^{n-1}+\sum_{k=n}^{\infty}\right)\frac{(-1)^k}{\Gamma(-\sigma+k+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\sigma},$$

再利用公式 $\Gamma(\xi)\Gamma(1-\xi)=\frac{\pi}{\sin\pi\xi}$,

得到

$$J_{-\sigma}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\Gamma(\sigma-k)\sin\pi(\sigma-k)}{\pi\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\sigma}+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(-\sigma+k+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\sigma}.$$

当 $0\leqslant k\leqslant n-1$ 时，有

$$\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{(-1)^k\Gamma(\sigma-k)\sin\pi(\sigma-k)}{\pi\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\sigma}\right]_{\sigma=n}=\frac{(-1)^k\Gamma(n-k)\cos\pi(n-k)}{\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}.$$

从而推出

$$\left[\frac{\partial J_{-\sigma}(x)}{\partial \sigma}\right]_{\sigma=n}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^n\Gamma(n-k)}{\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$

$$+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(-n+k+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$

$$\cdot\left[-\log\frac{x}{2}+\psi(-n+k+1)\right]$$

$$=(-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(n-k)}{\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$

$$+(-1)^{n-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)}$$

$$\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}\left[\log\frac{x}{2}-\psi(k+1)\right].$$

再用(18)和(17)就推出表达式(14)成立. ▌

我们由 $J_n(x)$ 的表达式不难看出

$$J_0(0)=1;\ J_n(0)=0\quad(当\ n\geqslant 1). \tag{19}$$

所以由(14)式推出

$$\lim_{x\to 0^+}Y_n(x)=-\infty. \tag{20}$$

由(19)和(20)可见, $J_n(x)$ 与 $Y_n(x)$ 是线性无关的, 从而它们的零点是相互分开的(这个结论的证明见第七章第一节中的推论 1).

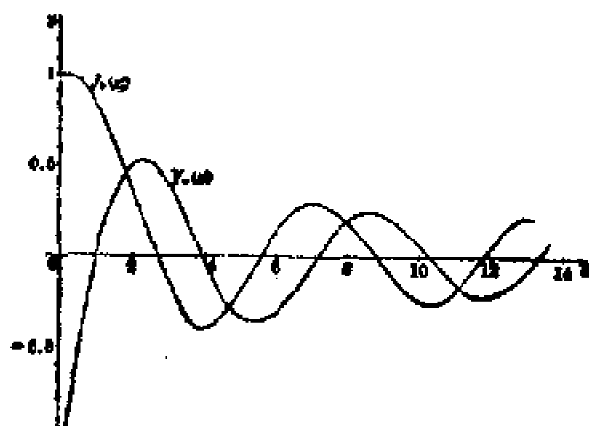


图 5-1

对于 $n=0$ 和 1 的情形，我们画出 $J_n(x)$ 和 $Y_n(x)$ 的大致图形如图 5-1 和 5-2.

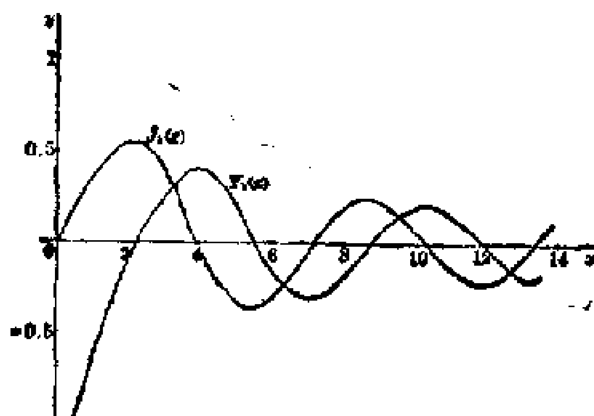


图 5-2

根据渐近公式，我们已经知道贝塞耳函数 $J_n(x)$ 有无穷多个零点；而且易知这些零点都是简单的. 设它们为

$$0<\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_k<\cdots \quad (\to\infty).$$

这些零点当然与 n 有关.

在实际应用中，有时需要在区间 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上讨论函数系

$$J_n(\beta_1 t),\ J_n(\beta_2 t),\ \cdots,\ J_n(\beta_k t),\ \cdots. \qquad (21)$$

3. 正交系 函数系 (21) 在区间 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上以 t 为权组成一个正交系，即

$$\int_0^1 tJ_n(\beta_j t)J_n(\beta_k t)dt=\begin{cases}0, & \text{当 } j\neq k;\\ \text{正数}, & \text{当 } j=k.\end{cases} \qquad (22)$$

事实上，令

$$u=J_n(at),\ v=J_n(bt),$$

则由贝塞耳方程 (1) 推出

$$t^2\ddot{u}+t\dot{u}+(a^2t^2-n^2)u=0 \quad \left(\cdot\text{表示 }\frac{d}{dt}\right)$$

和

$$t^2\ddot{v}+t\dot{v}+(b^2t^2-n^2)v=0.$$

从而得到

$$t^2(v\ddot{u}-u\ddot{v})+t(v\dot{u}-u\dot{v})+t^2(a^2-b^2)uv=0,$$

或消去因子 t, 得到

$$\frac{d}{dt}[t(v\dot{u}-u\dot{v})]+t(a^2-b^2)uv=0.$$

在区间 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上积分此等式，得到

$$(a^2-b^2)\int_0^1 tuv\,dt=u(1)\dot{v}(1)-v(1)\dot{u}(1). \tag{23}$$

(这里用到 $\dot{u}(0)$ 和 $\dot{v}(0)$ 是有界的.)因为

$$u(1)=J_n(a),\quad \dot{u}(1)=aJ_n'(a);$$
$$v(1)=J_n(b),\quad \dot{v}(1)=bJ_n'(b),$$

所以在(23)式中令 $a=\beta_j$ 和 $b=\beta_k(j\neq k)$, 就得

$$\int_0^1 tJ_n(\beta_j t)J_n(\beta_k t)dt$$
$$=\frac{\beta_k J_n(\beta_j)J_n'(\beta_k)-\beta_j J_n(\beta_k)J_n'(\beta_j)}{\beta_j^2-\beta_k^2}=0.$$

这就证明了公式(22)中的第一部分.

其次，在(23)中令 $b=\beta_k$, $a\neq\beta_k$, 则有

$$\int_0^1 tJ_n(at)J_n(\beta_k t)dt=\frac{\beta_k}{a^2-\beta_k^2}J_n(a)J_n'(\beta_k).$$

这等式的右端当 $a\to\beta_k$ 时，是一个 0 比 0 的不定形，用洛必达法则，我们得到

$$\int_0^1 t[J_n(\beta_k t)]^2dt=\frac{1}{2}[J_n'(\beta_k)]^2>0,$$

即得公式(22)中第二部分的证明. ▮

式(21)称为*贝塞耳正交函数系*. 与勒让德正交多项式系相仿，我们可以讨论函数 $f(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 关于贝塞耳正交函数系的展开问题.

设函数 $f(t)$ 在区间 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上可积，我们考虑它关于贝

塞耳正交函数系(21)的展开,即

$$f(t) \sim \sum_{j=1}^{\infty} a_j J_n(\beta_j t), \tag{24}$$

其中系数

$$a_j = \frac{2}{[J_n'(\beta_j)]^2} \int_0^1 t f(t) J_n(\beta_j t) dt. \tag{25}$$

注意 如果级数(24)一致收敛到 $f(t)$, 那么利用公式(22), 我们可以确定系数 a_j 满足(25); 反之, 设由公式(25)确定 a_j, 那么级数(24)不一定一致收敛到 $f(t)$. 在适当的条件下(例如 $f(t)$ 满足狄利克莱条件), 可以证明贝塞耳级数(24)收敛到 $f(t)$. 这与傅里叶级数的理论非常类似, 我们就不作进一步的讨论了.

在数学物理方法中, 贝塞耳函数是非常重要的工具. 由于篇幅所限, 我们不能列举关于贝塞耳函数的具有代表性的应用例题. 在这里我们只举一个简单的例题, 作为对贝塞耳函数讨论的结束.

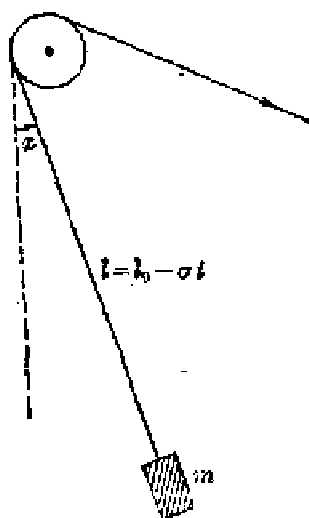


图 5-3

【例题】 起重机: 起重机提升货物时的运动方程, 有点象单摆的运动方程. 不同的地方是, 起重机提货的摆长 l 是随时间 t 而变化的(参考图 5-3).

参考单摆的运动方程, 我们得到起重机提货的运动方程

$$m \frac{d}{dt}\left(l \frac{dx}{dt}\right) + \alpha l \frac{dx}{dt} + mg \sin x = 0,$$

其中 m 代表货物的质量, $\alpha > 0$ 表示阻尼常数, l 表示"摆长". 设 $l = l_0 - \sigma t$, 则上面的运动方程变为

$$ml \frac{d^2x}{dt^2} - m\sigma \frac{dx}{dt} + \alpha l \frac{dx}{dt} + mg \sin x = 0,$$

或 $$\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\frac{-\sigma}{l}+\frac{\alpha}{m}\right)\frac{dx}{dt}+\frac{g}{l}\sin x=0.$$

为了简单起见，设

$$\sin x\simeq x,\ \frac{|\sigma|}{l}\gg\frac{\alpha}{m},$$

则由上式得到近似的运动方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{\sigma}{l_0-\sigma t}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{g}{l_0-\sigma t}x=0.$$

再令 $\xi=2\sqrt{g(l_0-\sigma t)}/|\sigma|$，即得贝塞耳方程

$$\xi^2\frac{d^2x}{d\xi^2}+\xi\frac{dx}{d\xi}+\xi^2x=0.$$

它的通解为

$$x=c_1J_0(\xi)+c_2Y_0(\xi).$$

从而我们得到起重机提货的摆动过程为

$$x=c_1J_0\left(\frac{2}{|\sigma|}\sqrt{gl}\right)+c_2Y_0\left(\frac{2}{|\sigma|}\sqrt{gl}\right).$$

设 $c_2\neq0$，则当 $l\to0$，根据诺曼函数的性质，有 $x\to\infty$（或 $-\infty$）. 这就是说，起重机提升货物时的摆动是不稳定的. 通常的电梯和矿井的罐笼总是限制在一个固定的孔道中上下滑动，其理由就是要防止产生这种不稳定的运动.

习 题 5·5

1．试证：

$$\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)]=-x^{-n}J_{n+1}(x);$$

$$\frac{d}{dx}[x^nJ_n(x)]=x^nJ_{n-1}(x).$$

2．证明半整数阶的贝塞耳函数为

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,\quad J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\ \text{（并作图），}$$

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}}(2x)^{n+\frac{1}{2}}\frac{d^n}{(dx^2)^n}\left[\frac{\sin x}{x}\right],$$

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(2x)^{n+\frac{1}{2}}\frac{d^n}{(dx^2)^n}\left[\frac{\cos x}{x}\right]$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

3．用贝塞耳函数表达微分方程

$$y''+xy=0$$

的通解$\left[\text{提示: 先令 } t=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\text{; 再令 } y=t^{\frac{1}{3}}u\right]$.

第五章小结

本章讨论微分方程

$$A(x)y''+B(x)y'+c(x)y=0 \tag{1}$$

的级数解法(这里设系数函数 $A(x)$、$B(x)$ 和 $C(x)$ 都是多项式)，分两种情况：

第一种情况：x_0 是一个常点，即 $A(x_0)\neq0$. 此时，微分方程(1)在 $x=x_0$ 的邻域内有收敛的幂级数解

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n,$$

其中 c_0, c_1 是两个任意常数，而系数 $c_n(n\geqslant1)$ 由一个递推公式随 c_0 与 c_1 而定.

一个重要的例子是勒让德方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0, \tag{2}$$

它以 $x=0$ 为一个常点. 当 $n\geqslant0$ 是整数时，勒让德方程(2)有一个多项式解

$$y=P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n].$$

而且勒让德方程另一个与 $P_n(x)$ 线性无关的解 $y=Q_n(x)$ 当

$x \to 1$ 时是无界的.

勒让德多项式系 $\{P_n(x)\}$ 在区间 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 上组成一个正交系，即

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{当 } m \neq n; \\ \dfrac{2}{2n+1}, & \text{当 } m = n. \end{cases}$$

因此，我们可以在 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 上讨论函数 $f(x)$ 的广义傅里叶级数

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x),$$

其中广义傅里叶系数

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx.$$

第二种情况：x_0 是一个正则奇点，即方程(1)可写成如下形式

$$(x-x_0)^2 P(x) y'' + (x-x_0) Q(x) y' + R(x) y = 0, \qquad (3)$$

其中 $P(x)$，$Q(x)$ 和 $R(x)$ 也都是多项式(或在 x_0 处可展开成泰勒级数)．此时，方程(3)在奇点 x_0 的一个邻域内有广义的幂级数解

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^{n+\rho},$$

其中 $c_0 \neq 0$ 是任意常数，ρ 是指标；指标 ρ 是由一个指标方程来确定的，系数 $c_n (n \geqslant 1)$ 由递推公式随 c_0 和 ρ 而定．最重要的特例是贝塞耳方程

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0 \quad (\text{常数 } n \geqslant 0), \qquad (4)$$

它以 $x=0$ 为一个正则奇点.

当 n 不是整数时，贝塞耳方程有两个线性无关的广义幂级数解 $y = J_n(x)$ 和 $y = J_{-n}(x)$(它们分别叫作第一类和第二类贝塞耳函数)．当 $x \to 0^+$ 时，$J_n(x)$ 是有界的，而 $J_{-n}(x)$ 是

无界的.

当 n 是整数时，我们只能得到贝塞耳方程一个广义幂级数解 $y=J_n(x)$，它当 $x\to 0^+$ 时是有界的．另一个与 $J_n(x)$ 线性无关的解是诺曼函数

$$Y_n(x)=\lim_{\alpha\to n}\frac{J_\alpha(x)\cos\alpha\pi-J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi},$$

它当 $x\to 0^+$ 时是无界的．$J_n(x)$ 有无穷多个零点

$$0<\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_k<\cdots\quad(\to\infty),$$

而且贝塞耳函数系（n 为固定）

$$J_n(\beta_1 t),\ J_n(\beta_2 t),\ \cdots,\ J_n(\beta_k t),\ \cdots$$

在区间 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上关于权 t 组成一个正交系[注]，即

$$\int_0^1 tJ_n(\beta_j t)J_n(\beta_k t)\,dt=\begin{cases}0, & \text{当 } j\neq k;\\ \dfrac{1}{2}[J_n'(\beta_k)]^2>0, & \text{当 } j=k.\end{cases}$$

因此，在区间 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上可以讨论函数 $f(t)$ 关于上述贝塞耳正交函数系的广义傅里叶级数

$$f(t)\sim\sum_{j=1}^{\infty}a_j J_n(\beta_j t),$$

其中广义傅里叶系数

$$a_j=\frac{2}{[J_n'(\beta_j)]^2}\int_0^1 tf(t)J_n(\beta_j t)\,dt.$$

［注］设 $\rho(t)$ 是在区间 $[a,b]$ 上给定的一个连续函数．又设 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 是在 $[a,b]$ 上的两个连续函数．如果积分

$$\int_a^b \rho(t)f_1(t)f_2(t)\,dt=0,$$

则称函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 在 $[a,b]$ 上关于权 $\rho(t)$ 是正交的．

第六章

拉普拉斯变换

关于常系数线性微分方程的求解问题，我们在第四章中所介绍的方法实际上已经够用了．不过，许多工程师大都喜欢采用另一种求解法——拉普拉斯变换，这是因为拉普拉斯变换对求解初值问题和间断的微分方程要比通常的方法快速得多，而且拉普拉斯变换与工程上的一些术语可以作紧密的配合．所以我们这一章的内容是为许多不太熟悉拉普拉斯变换的工程师和实际工作者提供方便的．

第一节　拉普拉斯变换的定义

我们在这一章中将简要地介绍一种求解常系数线性微分方程很有效的工具——拉普拉斯变换，它特别在电路分析和工程控制理论中有广泛的应用．

因为在定义拉普拉斯变换时需要用到无穷积分，所以我们先对它作一个简短的回顾．

设函数 $f(t)$ 定义在区间 $[a, \infty)$ 上，而且对于任意的 T $(>a)$，定积分 $\int_a^T f(t)dt$ 存在．我们形式地记作

$$\int_a^\infty f(t)dt=\lim_{T\to\infty}\int_a^T f(t)dt, \tag{1}$$

并且称

$$\int_a^\infty f(t)dt \tag{2}$$

为函数 $f(t)$ 在区间 $[a, \infty)$ 上的无穷积分. 如果在(1)式中右端的极限存在,则称无穷积分(2)为收敛的[此时(1)式成立];如果在(1)式中右端的极限不存在, 则称无穷积分(2)为发散的[此时(1)式无意义. 但是, 对于 $\lim\limits_{T\to\infty}\int_a^T f(t)dt=\infty$(或 $-\infty$)的情形, 我们也写作 $\int_a^\infty f(t)dt=\infty$(或 $-\infty$)].

【例题 1】 设函数 $f(t)=e^{kt}$, 其中 k 是实的常数. 计算它在区间 $[0, \infty)$ 上的无穷积分.

当 $k\neq0$ 时,有

$$\int_0^T e^{kt}dt=\frac{1}{k}e^{kt}\Big|_0^T=\frac{1}{k}(e^{kT}-1),$$

从而

$$\int_0^\infty f(t)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{k}(e^{kT}-1)=\begin{cases}\dfrac{-1}{k}, & \text{当 } k<0;\\ \infty, & \text{当 } k>0.\end{cases}$$

而当 $k=0$ 时,有

$$\int_0^\infty f(t)dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^T 1dt=\lim_{T\to\infty}(T)=\infty.$$

所以无穷积分 $\int_0^\infty e^{kt}dt$ 当 $k<0$ 时是收敛的; 当 $k\geqslant0$ 时是发散的.

【例题 2】 设函数 $f(t)=t^{-p}$ 定义在 $0<t<\infty$ 上, 其中 p 是一个正的常数. 计算它在区间 $[1, \infty)$ 上的无穷积分.

当 $p\neq1$ 时,有

$$\int_1^\infty f(t)dt=\lim_{T\to\infty}\int_1^T t^{-p}dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{1-p}(T^{1-p}-1)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & \text{当 } p>1;\\ 0, & \text{当 } p<1.\end{cases}$$

而当 $p=1$ 时，则有

$$\int_1^{\infty} f(t)dt=\lim_{T\to\infty}\int_1^T \frac{1}{t}dt=\lim_{T\to\infty}\log T=\infty.$$

所以无穷积分 $\int_1^{\infty} t^{-p}dt$ 当正数 $p\leqslant 1$ 时是发散的；当 $p>1$ 时是收敛的.

对于比较复杂一点的情况，怎样判别无穷积分的收敛性或发散性呢？这里介绍一种最常见的判别法.

首先，让我们来回顾一下函数的分段连续性：设函数 $f(t)$ 在 $t=t_0$ 点的左极限和右极限

$$f(t_0-0)=\lim_{(t<t_0;t\to t_0)} f(t)$$

和

$$f(t_0+0)=\lim_{(t>t_0;t\to t_0)} f(t)$$

都存在而不相等，则称 t_0 为函数 $f(t)$ 的一个第一类间断点. 这里，并不要求 $f(t)$ 在间断点 t_0 上有定义. 如果函数 $f(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上除掉有限个第一类间断点外是连续的，那么就称函数 $f(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上是分段连续的.

例如，由关系式

$$f_0(t)=\begin{cases} t, & 当\ 0\leqslant t<1; \\ 0, & 当\ 1\leqslant t<2; \\ 1, & 当\ 2\leqslant t\leqslant \pi \end{cases}$$

规定的函数 $f_0(t)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上是分段连续的.

又设对于任意的常数 $T(T\geqslant a)$，函数 $f(t)$ 在区间 $[a,T]$ 上是分段连续的，那么就称函数 $f(t)$ 在无穷区间 $[a,\infty)$ 上是分段连续的. 例如，函数

$$f(t)=\frac{\sin t}{|\sin t|}\quad (0\leqslant t<\infty)$$

在区间 $[0,\infty)$ 上是分段连续的（注意，$f(t)$ 当 $t=0,\pi,2\pi,\cdots$

时无定义).

大家知道，对于有界区间$[a, T]$上的分段连续函数$f(t)$，定积分$\int_a^T f(t)dt$总是存在的．因此，对于无穷区间$[a,\infty)$上的分段连续函数$f(t)$，对任意的$T(\geqslant a)$有定积分$\int_a^T f(t)dt$．但是，我们并不能断言无穷积分$\int_a^\infty f(t)dt$一定收敛．通常须要在某种条件下才能保证它的收敛性．在这里，我们介绍一个很有用的比较判别法：

定理1 设函数$f(t)$在区间$[a,\infty)$上分段连续，又设有某一函数$g(t)$和常数$b(>a)$，使得当$t\geqslant b$时，不等式

$$|f(t)|\leqslant g(t)$$

成立，而且无穷积分

$$\int_b^\infty g(t)dt \tag{3}$$

收敛，则无穷积分

$$\int_a^\infty f(t)dt \tag{4}$$

也收敛；另一方面，如果当$t\geqslant b$时，有不等式$f(t)\geqslant g(t)$，而且无穷积分(3)是发散的，则无穷积分(4)也是发散的．

这个定理的证明可从一般的微积分教科书中找到，我们在这里就不重复了．只要在几何上比较由无穷积分(3)和(4)所表示的面积，那么定理的结论是十分明显的．在实际应用比较判别法(定理1)时，关键是能否找到比较函数$g(t)$；通常我们取$g(t)=Ae^{kt}$或At^{-p}(这里常数$A>0$，而k，p也都是常数)，它们的敛散性在例题1和2中已经讨论清楚了．

设函数$f(t)$在无穷区间$[0,\infty)$上是分段连续的．我们对它作一个含参变量s的无穷积分

$$F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt. \tag{5}$$

如果无穷积分(5)收敛，则称 $F(s)$ 为 $f(t)$ 的拉普拉斯变换，或简称为拉氏变换；通常把它记作 $\mathscr{L}\{f(t)\}$，亦即

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt. \tag{6}$$

在拉氏变换的一般理论中，假定参变量 s 为复值．但是，我们在这里要讨论的只限于参变量 s 是实值的情形，因为它对于许多实际应用的问题也已经足够了．这样，读者即使尚未学习复变函数论，也并不妨碍学习和掌握本章所讲的拉氏变换．为了逐步掌握拉氏变换的实质，下面先举一些例子．

【例题 3】 求函数 $u_0(t)=1\ (0\leqslant t<\infty)$ 的拉氏变换．

由公式(5)，我们得到函数 $u_0(t)$ 的拉氏变换为

$$F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}\cdot 1dt=\frac{1}{s}\quad (s>0), \tag{7}$$

即
$$\mathscr{L}\{u_0(t)\}=\frac{1}{s}\quad (s>0);$$

有时也写作
$$\mathscr{L}\{1\}=\frac{1}{s}\quad (s>0).$$

【例题 4】 求 $f(t)=e^{\alpha t}$ 的拉氏变换，这里 α 是实数．

因为

$$\mathscr{L}\{e^{\alpha t}\}=\int_0^{\infty}e^{-st}\cdot e^{\alpha t}dt=\int_0^{\infty}e^{-(s-\alpha)t}dt,$$

所以

$$\mathscr{L}\{e^{\alpha t}\}=\frac{1}{s-\alpha}\quad (s>\alpha). \tag{8}$$

【例题 5】 设 $f(t)=\sin\omega t$，这里常数 $\omega>0$．求它的拉氏变换．

当 $s>0$ 时，得拉氏变换

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}\sin\omega t\,dt.$$

利用二次分部积分，推出

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}\sin\omega t\,dt=\frac{1}{\omega}-\frac{s}{\omega}\int_0^\infty e^{-st}\cos\omega t\,dt \tag{9}$$

$$=\frac{1}{\omega}-\frac{s}{\omega}\left(\frac{s}{\omega}\int_0^\infty e^{-st}\sin\omega t\,dt\right)$$

$$=\frac{1}{\omega}-\frac{s^2}{\omega^2}F(s).$$

由此可以解出

$$F(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$

亦即

$$\mathscr{L}\{\sin\omega t\}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\quad(s>0). \tag{10}$$

又由(9)，得

$$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{1}{\omega}-\frac{s}{\omega}\int_0^\infty e^{-st}\cos\omega t\,dt,$$

从而

$$\int_0^\infty e^{-st}\cos\omega t\,dt=\frac{s}{s^2+\omega^2},$$

亦即

$$\mathscr{L}\{\cos\omega t\}=\frac{s}{s^2+\omega^2}\quad(s>0). \tag{11}$$

把上述结果归纳成一表格(见表格1)，以便于读者掌握。

从表格1看到，对$f(t)$作拉氏变换$\mathscr{L}$，相当于在$f(t)$的一栏中，在同一行向右查出对应的$F(s)$。例如，对于函数$\sin\omega t$，我们查到它的拉氏变换为$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}(s>0)$。如果能够归纳出一张比表格1更大一点的表，那么对拉氏变换的应用将是十分方便的。下面在研究拉氏变换的基本性质时，将不断扩大这个表格，在最后一节归纳成表格2。

表格 1

编　　号	$f(t)$	$F(s)$
1	1	$\frac{1}{s}\quad(s>0)$
2	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}\quad(s>\alpha)$
3	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\quad(s>0)$
4	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}\quad(s>0)$

对于一般的函数$f(t)$，通常不能象上面的例子那样容易直接算出它的拉氏变换.有时,我们甚至还不知道它的拉氏变换是否存在．因此，为了保证拉氏变换$\mathscr{L}\{f(t)\}$的存在性，应该对函数$f(t)$附加一定的条件，这个条件通常就如下面的不等式(12).

定理2　设函数$f(t)$在区间$[0, \infty)$上是分段连续的，而且当$t\geqslant b(>0)$时，满足不等式

$$|f(t)|\leqslant Ae^{kt}, \tag{12}$$

其中A和k都是实的常数，而且$A\geqslant 0$．则$f(t)$的拉氏变换

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \tag{13}$$

当$s>k$时存在.

【证明】　我们只需证明无穷积分(13)当$s>k$时是收敛的．为此,先把它拆成两部分:

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^b e^{-st}f(t)dt+\int_b^\infty e^{-st}f(t)dt, \tag{14}$$

这里右边第一项的定积分显然是存在的，至于第二项的无穷积分,可以用比较判别法．事实上,由(12)推出

$$|e^{-st}f(t)|\leqslant Ae^{kt}e^{-st}=Ae^{-(s-k)t}.$$

而当 $s>k$ 时，易知无穷积分

$$\int_0^\infty Ae^{-(s-k)t}dt$$

是收敛的．因此，由定理1推出无穷积分

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

当 $s>k$ 时也是收敛的．这就证明了定理的结论．▌

我们称满足形如不等式(12)的函数 $f(t)$ 为指数级的．读者可以验证从例题1到例题5中所给的函数都是指数级的；而函数 $f(t)=e^{t^2}$ 则不是指数级的．由定理2可知，对指数级的函数，我们总可以作它们的拉氏变换．

上面所讲的求拉氏变换的过程是：从 t 域中的已知函数 $f(t)$ 求出它在 s 域中的拉氏变换 $F(s)$．用简单的记号表示这个过程，就是

$$\mathscr{L}: f(t)\longmapsto F(s). \tag{15}$$

但是，在实际的应用中，往往需要把这个过程反过来，即在 s 域中给定函数 $F(s)$，要在 t 域中求一个函数 $f(t)$，使得 $\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$．我们就用记号

$$\mathscr{L}^{-1}: F(s)\longmapsto f(t) \tag{16}$$

或

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t) \tag{17}$$

来表示这个过程．正如在(15)中的拉氏变换一样，我们称(16)或(17)中的 $f(t)$ 为 $F(s)$ 的拉氏反演变换．现在再以上面的表格1为例，来说明运算符号 $\mathscr{L}^{-1}$ 的意义：$\mathscr{L}^{-1}$ 的作用相当于在表格1中的 $F(s)$ 栏在同一行向左查出对应的 $f(t)$．例如，根据表格1，我们可以查得

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}=e^{t},\quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^{2}+4}\right\}=\sin 2t,$$

等等.

在这里我们须要指出，根据拉氏变换的定义，即公式(5)或(6)，对于给定的$f(t)$，它的拉氏变换$F(s)$或$\mathscr{L}\{f(t)\}$显然是唯一的；反之，对于给定的$F(s)$，它的拉氏反演变换$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$是否唯一呢？对这个问题的回答就不是很简单的了，有兴趣的读者可以参考C. 窦志著的《拉普拉斯变换的理论和应用导论》(张义良译，科学出版社出版，1966年). 在这里我们只要求承认一个结论：$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$是唯一的，也就是说，如果有$f_1(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$和$f_2(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$，那么$f_1(t)=f_2(t)$.

现在，我们来证明拉氏变换和拉氏反演变换的一个重要的性质，即$\mathscr{L}$与$\mathscr{L}^{-1}$都是线性运算子[注].

定理3 设$\mathscr{L}\{f_1(t)\}$和$\mathscr{L}\{f_2(t)\}$都存在，则对于任意的常数c_1和c_2，$\mathscr{L}\{c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\}$也存在，而且

$$\mathscr{L}\{c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\}=c_1\mathscr{L}\{f_1(t)\}+c_2\mathscr{L}\{f_2(t)\},\quad(18)$$

即拉氏变换$\mathscr{L}$是线性运算子.

此定理的证明可以从拉氏变换的定义直接推出，留给读者完成.

定理4 设$\mathscr{L}^{-1}\{F_1(s)\}$和$\mathscr{L}^{-1}\{F_2(s)\}$都存在，则对于任意的常数$c_1$和$c_2$，$\mathscr{L}^{-1}\{c_1F_1(s)+c_2F_2(s)\}$也存在，而且

$$\mathscr{L}^{-1}\{c_1F_1(s)+c_2F_2(s)\}=c_1\mathscr{L}^{-1}\{F_1(s)\}+c_2\mathscr{L}^{-1}\{F_2(s)\},\quad(19)$$

[注] 所谓"运算子"实质上是某种数学运算的抽象称呼. 例如，我们在微积分教程中学过的微分运算d与积分运算$\int$都是运算子. 而且我们知道微分运算和积分运算都是线性的，即d和$\int$都是线性运算子.

即 $\mathscr{L}^{-1}$ 也是线性运算子。

【证明】 令

$$f_1(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F_1(s)\},\ f_2(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F_2(s)\},$$

即

$$F_1(s)=\mathscr{L}\{f_1(t)\},\ F_2(s)=\mathscr{L}\{f(t)\},$$

则(19)式的右端为

$$c_1\mathscr{L}^{-1}\{F_1(s)\}+c_2\mathscr{L}^{-1}\{F_2(s)\}=c_1f_1(t)+c_2f_2(t).$$

它的拉氏变换由(18)得到

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\}&=c_1\mathscr{L}\{f_1(t)\}+c_2\mathscr{L}\{f_2(t)\}\\&=c_1F_1(s)+c_2F_2(s).\end{aligned}$$

由拉氏反演变换的唯一性,有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\{c_1F_1(s)+c_2F_2(s)\}&=c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\\&=c_1\mathscr{L}^{-1}\{F_1(s)\}+c_2\mathscr{L}^{-1}\{F_2(s)\},\end{aligned}$$

即公式(19)成立. ▌

习 题 6.1

1. 判别下列积分的敛散性:

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{1+t^2}dt$;

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}t^ne^{-t}dt$ (常数 $n>0$);

(3) $\displaystyle\int_1^{\infty}t^{-2}e^tdt$.

2. 求下列函数的拉氏变换:

(1) t;

(2) $\sinh at\left(=\dfrac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right)$;

(3) $\cosh at\left(=\dfrac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right)$;

(4) t^n (n 为正整数);

(5) $3e^{7t}-\dfrac{2}{5}\cos\sqrt{2}t$.

3. 求下列函数的拉氏反演变换:

(1) $\frac{3}{s+1}-\frac{2}{s-2}$; (2) $\frac{s-1}{(s-2)(s+1)}$;

(3) s^{-n} (n为正整数).

4. 设$f(t)$是指数级函数，而$F(s)$是$f(t)$的拉氏变换. 试求

$$\lim_{s\to+\infty}F(s)=?$$

第二节 求解初值问题

在这一节中，我们将用拉氏变换求解一些简单的微分方程的初值问题，借以说明这种解法的基本步骤. 首先，我们须要做一点准备工作.

定理 1 设函数$f(t)$在区间$[0, \infty)$上连续而且有分段连续的导数$f'(t)$. 又设$f(t)$是指数级的函数，即存在常数$A(>0)$和k，使得不等式

$$|f(t)|\leqslant Ae^{kt} \quad (0\leqslant t<\infty) \tag{1}$$

成立，则当$s>k$时，$f'(t)$的拉氏变换存在，而且

$$\mathscr{L}\{f'(t)\}=s\mathscr{L}\{f(t)\}-f(0). \tag{2}$$

【证明】 为了证明$f'(t)$的拉氏变换

$$\mathscr{L}\{f'(t)\}=\int_0^{\infty}e^{-st}f'(t)dt$$

的存在性，我们先考虑积分

$$\int_0^T e^{-st}f'(t)dt,$$

因为$f'(t)$是分段连续的，所以它在区间$[0, T]$上的间断点的个数是有限的. 设这些间断点为$t_1, t_2, \cdots, t_n$，则有

$$\int_0^T e^{-st}f'(t)dt=\int_0^{t_1}e^{-st}f'(t)dt+\int_{t_1}^{t_2}e^{-st}f'(t)dt+\cdots$$
$$+\int_{t_n}^{T}e^{-st}f'(t)dt.$$

对上式右端各项作分部积分，就得到

$$\int_0^T e^{-st}f'(t)dt=\left(e^{-st}f(t)\Big|_0^{t_1}+e^{-st}f(t)\Big|_{t_1}^{t_2}+\cdots+e^{-st}f(t)\Big|_{t_n}^{T}\right)$$

$$+s\left[\int_0^{t_1}e^{-st}f(t)dt+\int_{t_1}^{t_2}e^{-st}f(t)dt+\cdots\right.$$

$$\left.+\int_{t_n}^{T}e^{-st}f(t)dt\right]$$

$$=(e^{-sT}f(T)-f(0))+s\int_0^T e^{-st}f(t)dt. \qquad (3)$$

由不等式(1)推出

$$|e^{-sT}f(T)|\leqslant Ae^{-(s-k)T}.$$

从而，当 $s>k$ 时，有

$$\lim_{T\to\infty}e^{-sT}f(T)=0.$$

所以在公式(3)中令 $T\to\infty$，就得到

$$\int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt=-f(0)+s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt,$$

即公式(2)成立。】

在适当的条件下，我们可应用这定理来计算

$$\mathscr{L}\{f''(t)\}=s\mathscr{L}\{f'(t)\}-f'(0)$$

$$s=[s\mathscr{L}\{f(t)\}-f(0)]-f'(0),$$

亦即

$$\mathscr{L}\{f''(t)\}=s^2\mathscr{L}\{f(t)\}-sf(0)-f'(0). \qquad (4)$$

而且可用归纳法证明下面的一般公式：

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\}=s^n\mathscr{L}\{f(t)\}-[s^{n-1}f(0)+\cdots$$

$$+sf^{(n-2)}(0)+f^{(n-1)}(0)]. \qquad (5)$$

现在，我们就用拉氏变换来求解一个简单的初值问题：

【例题 1】 求解初值问题

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-12y=0, \qquad (6)$$

$$y(0)=-7, \quad y'(0)=0. \tag{7}$$

为了把拉氏变换同第四章第四节中所讲的解法进行比较，我们先用后一解法来求解初值问题(6)+(7)，然后再用拉氏变换求解，并加以比较.

令 $y=e^{\lambda t}$ 为方程(6)的解，则得到特征方程

$$\lambda^2+\lambda-12=0,$$

即$(\lambda-3)(\lambda+4)=0$. 因此，特征根为$\lambda_1=3$, $\lambda_2=-4$. 而微分方程(6)的通解为

$$y=c_1e^{3t}+c_2e^{-4t},$$

为了使它满足初始条件，我们把它代入(7)，就有

$$\begin{cases} c_1+c_2=-7 \\ 3c_1-4c_2=0, \end{cases} \tag{8}$$

由此解得 $c_1=-4$, $c_2=-3$. 于是，所求初值问题的解为

$$y=-4e^{3t}-3e^{-4t}. \tag{9}$$

其次，我们再用拉氏变换来求解. 因为 $\mathscr{L}\{0\}=0$, 所以由微分方程(6)，得

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-12y\right\}=0.$$

利用拉氏变换的线性性质，就得到

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\}+\mathscr{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\}-12\mathscr{L}\{y\}=0.$$

再由公式(2)和(4)，得

$$[s^2\mathscr{L}\{y\}-sy(0)-y'(0)] + [s\mathscr{L}\{y\}-y(0)]-12\mathscr{L}\{y\}=0.$$

令 $\mathscr{L}\{y\}=Y(s)$, 即得

$$(s^2+s-12)Y(s)-(1+s)y(0)-y'(0)=0. \tag{10}$$

再用初始条件(7)，由(10)解出

$$Y(s)=\frac{-7(s+1)}{s^2-s-12}=\frac{-7(s+1)}{(s+4)(s-3)}. \tag{11}$$

到此，我们已经求出了未知函数 $y=y(t)$ 的拉氏变换 $Y(s)$．现在的问题是如何从 $Y(s)$ 来确定 $y(t)$．为此，我们利用部分分式，把(11)改写为

$$Y(s)=\frac{-3}{s+4}+\frac{-4}{s-3}.$$

对这等式作拉氏反演变换 $\mathscr{L}^{-1}$，就有

$$\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}=-3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}-4\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}.$$

我们可以利用表格 1，反查得到

$$y(t)=-3e^{-4t}-4e^{3t}. \tag{12}$$

这恰好与上面第一种解法所得的解(9)完全一样．

由于例题 1 中的初值问题相当简单，所以在上面两种解法中，拉氏变换似乎显露不出明显的优点．但是，我们还是可以指出拉氏变换在解题过程中的一些重要特征．首先，我们注意到，本来讨论的是一个微分方程，它的解 $y=y(t)$ 是未知的，但是在利用拉氏变换后，推出 $y(t)$ 的拉氏变换 $Y(s)$ 满足一个非常简单的代数方程(10)，从而轻而易举地确定了 $Y(s)$．这样一来，留下来的问题实际上只是一个查表的问题了．其次，用拉氏变换求得的解(12)自动满足初始条件(7)．这里就省去了在第一种方法中从通解确定满足初始条件的特解这个步骤，这也就省去了求解一个联立方程组(8)．如果求解的是一个高阶的微分方程，那么从这个相应省去的联立方程组就会节省可观的时间．实际工作者喜欢用拉氏变换求解微分方程的初值问题，恐怕这一点也是一个主要的原因．当然，我们在这里也注意到，在应用拉氏变换时，主要的困难是由 $Y(s)$ 来确定 $y(t)$，即求拉氏反演变换的问题．一般说来，这是一个

比较困难的问题．但对于许多工程中出现的一般问题，常常只要有一张拉氏变换的简表（如本章末的表格 2）就足够了．

【例题 2】 求解初值问题

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=\sin 2t, \tag{13}$$

$$y(0)=0,\ y'(0)=1. \tag{14}$$

由(13)得

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\}+\mathscr{L}\{y\}=\mathscr{L}\{\sin 2t\},$$

令 $Y(s)=\mathscr{L}\{y(t)\}$，则

$$[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+Y(s)=\frac{2}{s^2+4},$$

再用初始条件(14)，推出

$$Y(s)=\frac{s^2+6}{(s^2+1)(s^2+4)},$$

亦即

$$Y(s)=\frac{5}{3(s^2+1)}-\frac{2}{3(s^2+4)}.$$

通过反查表格 1，得到

$$\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}=\frac{5}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}-\frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\}$$

$$=\frac{5}{3}\sin t-\frac{1}{3}\sin 2t,$$

即得所求的解

$$y=\frac{5}{3}\sin t-\frac{1}{3}\sin 2t. \tag{15}$$

请注意，在用拉氏变换求解的过程中，开头就须假设未知函数 $y(t)$ 的拉氏变换 $Y(s)$ 是存在的．一旦由此求得 $y(t)$ 之后，照理，还须验证它满足所说的假设，然后才能证实所用拉氏变换的合法性．但是，通常都不做这种例行的文章．

最后，还要指出，由例题 1 和 2 可见，用拉氏变换求解齐次线性微分方程和非齐次线性微分方程初值问题的基本步骤是一样的. 这也可以说是拉氏变换的一个优点.

习 题 6·2

1. 用拉氏变换求解下列初值问题:

(1) $y''-y'-6y=0$; $y(0)=1$, $y'(0)=-1$.

(2) $y''+3y'+2y=0$; $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

(3) $y''+\omega^2y=\cos 2t$ $(\omega^2\neq 4)$; $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

(4) $y''-2y'+2y=e^{-t}$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

2. 令 $F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$, 其中 $f(t)$ 是指数级的函数. 试证明:

(1) $F'(s)=\mathscr{L}\{-tf(t)\}$;

(2) $F^{(n)}(s)=\mathscr{L}\{(-t)^nf(t)\}$.

3. 利用上题的结果，计算下列函数的拉氏变换:

(1) t^ne^{at} (n 是正整数, a 是常数);

(2) $t^2\sin t$;   (3) t^n.

4. 用拉氏变换求解下列初值问题:

(1) $y''-4y'+4y=0$; $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

(2) $y^{(4)}-4y'''+6y''-4y'+y=0$;

$y(0)=y''(0)=0$, $y'(0)=y'''(0)=1$.

(3) $y''+4y=\cos 2t$; $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

5. 求证:

$$\mathscr{L}\{J_0(t)\}=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \quad (s>1).$$

第三节 含间断强迫函数的微分方程

在某些实际应用中，有时微分方程含间断的强迫函数. 在这一节和下一节，我们将讨论这类微分方程的解法. 为

了更好地处理这类方程，先讨论一个特殊的间断函数——单位阶梯函数

$$u_c(t)=\begin{cases}0, & 当\ t<c;\\ 1, & 当\ t\geqslant c,\end{cases}$$

其中常数 $c\geqslant 0$. 它的图形如图 6-1.

【例题 1】 试作函数

$$h(t)=u_{\pi}(t)-u_{2\pi}(t)\quad (t\geqslant 0)$$

的图形.

由单位阶梯函数的定义，我们得到

$$h(t)=\begin{cases}0, & 当\ 0\leqslant t<\pi;\\ 1, & 当\ \pi\leqslant t<2\pi;\\ 0, & 当\ 2\pi\leqslant t<\infty.\end{cases}$$

由此可作出 $h(t)$ 的图(图 6-2).

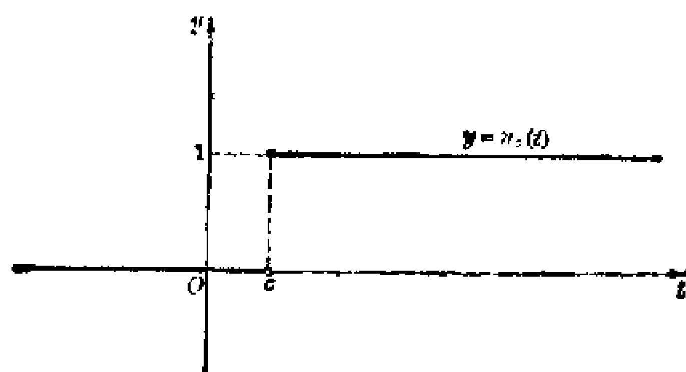


图 6-1

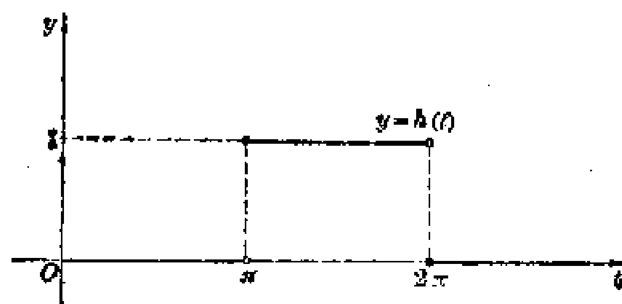


图 6-2

以下为了讨论方便，不妨设函数$f(t)$的定义区间为$(-\infty, \infty)$.我们笼统地设它的图形如图6-3中的曲线ABC.有时须要考虑这样的函数$g(t)$，它当$0\leqslant t<\alpha$时处于静止(即$g(t)=0$)，而在$t=\alpha$后截取函数$f(t)$对应于$t\geqslant 0$时的那一部分.这相当于把图6-3中的弧段BC向右平移一段距离α，得到图6-4中的曲线.

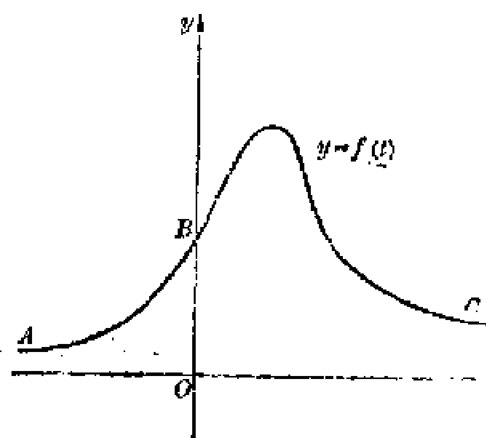


图 6-3

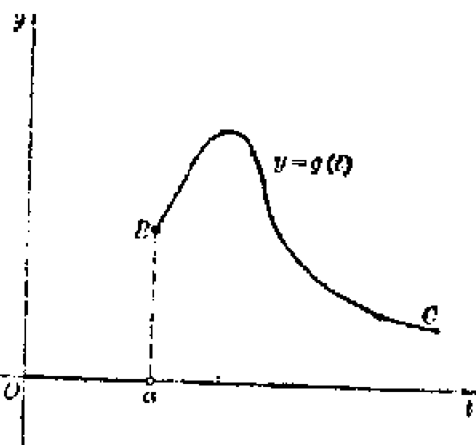


图 6-4

我们可以把上述函数$g(t)$表示成

$$g(t)=u_{\alpha}(t)f(t-\alpha) \quad (t\geqslant 0).$$

我们要讨论这个平移函数$g(t)$的拉氏变换$G(s)$和$f(t)$的拉氏变换$F(s)$之间的关系，它在下面的应用中是很重要的.

容易算出单位阶梯函数$u_{\alpha}(t)$的拉氏变换

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{u_{\alpha}(t)\}&=\int_0^{\infty}e^{-st}u_{\alpha}(t)dt\\&=\int_{\alpha}^{\infty}e^{-st}dt=\frac{1}{s}e^{-\alpha s} \quad (s>0),\end{aligned}$$

即

$$\mathscr{L}\{u_{\alpha}(t)\}=\frac{1}{s}e^{-\alpha s} \quad (s>0). \tag{1}$$

定理1、设$F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}$ $(s>k)$，则有

$$\mathscr{L}\{u_a(t)f(t-a)\}=e^{-as}F(s)\quad(s>k).\tag{2}$$

反之，设 $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)$，则有

$$\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}=u_a(t)f(t-a).\tag{3}$$

【证明】 只要直接进行计算

$$\mathscr{L}\{u_a(t)f(t-a)\}=\int_0^\infty e^{-st}u_a(t)f(t-a)dt$$

$$=\int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt,$$

再作积分变量的替换 $\tau=t-a$，即得

$$\int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt=\int_0^\infty e^{-s(\tau+a)}f(\tau)d\tau$$

$$=e^{-as}\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)d\tau=e^{-as}F(s).$$

从而公式(2)得证．至于公式(3)，它是公式(2)的一个直接推论．定理1证完．】

我们还记得 $\mathscr{L}\{1\}=\frac{1}{s}(s>0)$，因此，由(2)推出

$$\mathscr{L}\{u_a(t)\}=\frac{1}{s}e^{-as}\quad(s>0).$$

这与公式(1)完全一致．

【例题2】 试求函数

$$f(t)=\begin{cases}\sin t, & 当\ 0\leqslant t<2\pi;\\ \sin t+\cos t, & 当\ 2\pi\leqslant t<\infty\end{cases}$$

的拉氏变换．

读者当然可以根据定义直接计算 $\mathscr{L}\{f(t)\}$，但是下面的方法更灵巧一些：首先，可以把函数 $f(t)$ 表为

$$f(t)=\sin t+u_{2\pi}(t)\cos(t-2\pi),$$

然后就可以得到

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\mathscr{L}\{\sin t\}+\mathscr{L}\{u_{2\pi}(t)\cos(t-2\pi)\}$$

$$=\frac{1}{s^2+1}+e^{-2\pi s}\cdot\frac{s}{s^2+1}=\frac{1+se^{-2\pi s}}{s^2+1}.$$

【例题 3】 试求函数

$$F(s)=\frac{s-e^{-s}}{s^2}\quad(s>0)$$

的拉氏反演变换 $f(t)$.

我们已知 $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=1;\quad\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=t,$

所以

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-s}\cdot\frac{1}{s^2}\right\}$$
$$=1-u_1(t)(t-1),$$

即

$$f(t)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0\leqslant t<1;\\ 2-t, & \text{当 } 1\leqslant t<\infty.\end{cases}$$

下面的定理证明了拉氏变换的另一个有用的性质.

定理 2 设 $F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}$ $(s>k)$, c 是常数, 则

$$\mathscr{L}\{e^{ct}f(t)\}=F(s-c)\ (s>k+c);\tag{4}$$

反之, 若 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$, 则

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s-c)\}=e^{ct}f(t).\tag{5}$$

证明留作习题.

定理 2 在表面上有点象定理 1, 但应注意它们的区别.

【例题 4】 试求

$$Y(s)=\frac{1}{s^2-4s+5}$$

的拉氏反演变换 $y(t)$.

对上式右端的分母进行配方, 就得

$$Y(s)=\frac{1}{(s-2)^2+1}=F(s-2),$$

其中 $F(s)=\frac{1}{s^2+1}$. 因为 $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=\sin t$, 所以由(5)推出

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathscr{L}^{-1}\{F(s-2)\}=e^{2t}\sin t.$$

现在,我们来求解含间断强迫函数的微分方程.

【例题 5】 设微分方程

$$y''+4y=f_0(t), \tag{6}$$

其中强迫函数

$$f_0(t)=\begin{cases}0, & \text{当 } 0\leqslant t<\pi;\\ 1, & \text{当 } \pi\leqslant t<2\pi;\\ 0, & \text{当 } 2\pi\leqslant t<\infty.\end{cases}$$

又设初始条件

$$y(0)=1,\quad y'(0)=0. \tag{7}$$

试求初值问题(6)+(7)的解.

首先,我们可以把 $f_0(t)$ 写成

$$f_0(t)=u_\pi(t)-u_{2\pi}(t).$$

因此,由(6)得到

$$\mathscr{L}\{y''\}+4\mathscr{L}\{y\}=\mathscr{L}\{u_\pi(t)\}-\mathscr{L}\{u_{2\pi}(t)\}.$$

令 $Y(s)=\mathscr{L}\{y\}$, 则有

$$[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+4Y(s)=\frac{e^{-\pi s}}{s}-\frac{e^{-2\pi s}}{s}.$$

再利用初始条件(7),我们得到

$$Y(s)=\frac{s}{s^2+4}+\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+4)}-\frac{e^{-2\pi s}}{s(s^2+4)}.$$

从而

$$\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+2^2)}\right\}$$
$$-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s}}{s(s^2+2^2)}\right\}, \tag{8}$$

其中右端第一项等于 $\cos 2t$. 为了计算后两项，我们先计算

$$g(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+2^2)}\right\}.$$

因为

$$\frac{1}{s(s^2+2^2)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+2^2}\right),$$

所以

$$g(t)=\frac{1}{4}\left(\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(1-\cos 2t).$$

再由(3)，则得

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+2^2)}\right\}=u_\pi(t)g(t-\pi)$$

$$=\frac{1}{4}u_\pi(t)[1-\cos 2(t-\pi)]$$

和

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s}}{s(s^2+2^2)}\right\}=\frac{1}{4}u_{2\pi}(t)[1-\cos 2(t-2\pi)].$$

于是由(8)，就有

$$y(t)=\cos 2t+\frac{1}{4}u_\pi(t)[1-\cos 2(t-\pi)]$$

$$-\frac{1}{4}u_{2\pi}(t)[1-\cos 2(t-2\pi)],$$

或

$$y(t)=\begin{cases}\cos 2t, & \text{当 } 0\leqslant t<\pi;\\ \dfrac{3}{4}\cos 2t+\dfrac{1}{4}, & \text{当 } \pi\leqslant t<2\pi;\\ \cos 2t, & \text{当 } 2\pi\leqslant t<\infty.\end{cases}$$

如果不用拉氏变换求解，而用第四章所讲的一般方法来求解，那么须要分为三个不同的区间 $0\leqslant t<\pi$, $\pi\leqslant t<2\pi$ 和

$2\pi\leqslant t<\infty$,不仅要根据初始条件来确定在 $0\leqslant t<\pi$ 上的解,而且还要讨论所求的解 $y(t)$在 $t=\pi$ 和 $t=2\pi$ 处光滑地(即要求 $y'(t)$连续)连接起来;而这里的拉氏变换却比较简捷.

习 题 6·3

1．求下列函数的拉氏变换:

(1) $f(t)=\begin{cases}0 & (t<2),\\ (t-2)^2 & (t\geqslant 2);\end{cases}$ (2) $f(t)=\begin{cases}0 & (t<\pi),\\ t-\pi & (\pi\leqslant t<2\pi),\\ 0 & (t\geqslant 2\pi);\end{cases}$

(3) $f(t)=(t-3)u_2(t)-(t-2)u_3(t)$.

2．求下列函数的拉氏反演变换:

(1) $F(s)=\dfrac{3!}{(s-2)^4}$; (2) $F(s)=\dfrac{e^{-2s}}{s^2+s-2}$;

(3) $F(s)=\dfrac{2(s-1)e^{-2s}}{s^2-2s+2}$; (4) $F(s)=\dfrac{2e^{-2s}}{s^2-4}$.

3．设 $F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}$ $(s>k\geqslant 0)$,则

(1) 对于任意正的常数 m,

$$\mathscr{L}\{f(mt)\}=\frac{1}{m}F\left(\frac{s}{m}\right)\quad(s>mk);$$

(2) 对于任意正的常数 l,

$$\frac{1}{l}f\left(\frac{t}{l}\right)=\mathscr{L}^{-1}\{F(ls)\}.$$

4．求解下列初值问题:

(1) $y''+y=f(t)$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant t<\infty.\end{cases}$$

(2) $y''+2y'+2y=h(t)$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

$$h(t)=\begin{cases}1, & \pi\leqslant t<2\pi;\\ 0, & \text{其他地方}.\end{cases}$$

(3) $y''+4y=\sin t-u_{2\pi}(t)\sin(t-2\pi)$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

第四节　狄拉克函数及其应用

有许多实际问题引导到冲量函数的概念，例如在一瞬间的大作用力或超高压. 这类问题又往往归结到求解下面形式的微分方程

$$ay''+by'+cy=f(t), \tag{1}$$

其中强迫函数 $f(t)$ 在小区间 $0\leqslant t<\tau$ 上取很大的值，而在别处等于 0. 令

$$I(\tau)=\int_0^\tau f(t)dt, \tag{2}$$

由于 $f(t)$ 在区间 $0\leqslant t<\tau$ 外等于 0，所以(2)式也可写成

$$I(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt, \tag{3}$$

它表示对强迫函数 $f(t)$ 的一种度量. 在力学问题中，如果 $f(t)$ 是力，那么 $I(\tau)$ 表示力 $f(t)$ 在时间区间 $[0, \tau]$ 上的总冲量. 类似地，若 $f(t)$ 表示电压的变化率，那么 $I(\tau)$ 就是总电压.

特别，我们假设

$$f(t)=d_\tau(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\tau}, & \text{当 } 0\leqslant t<\tau;\\ 0, & \text{在别处,}\end{cases} \tag{4}$$

其中 τ 是一个很小的正数. 此时相应的

$$I(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} d_\tau(t)dt=\int_0^\tau \frac{1}{\tau}dt=1 \tag{5}$$

对一切 τ 都成立，即 $I(\tau)$ 取单位冲量.

现在，让我们想象，强迫函数 $d_\tau(t)$ 的作用时间 τ 愈来愈

短，或者说，令 $\tau\to 0$. 这样，在形式上就得到了一个极限"函数"，记作

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0} d_\tau(t). \tag{6}$$

而且我们从(4)看到：

$$\text{当 } t\neq 0 \text{ 时,}\quad \delta(t)=0. \tag{7}$$

另一方面，由(5)和(6)，在形式上得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1. \tag{8}$$

在普通微积分教程中有：如果一个函数除掉一点外恒等于 0，那么它的积分应该等于 0. 这个结论对这里的"函数" $\delta(t)$ 显然是不适用的[注意(7)和(8)]. 因此，这里的 $\delta(t)$ 不是通常意义下的函数，我们叫它为广义函数. 在数学物理中，$\delta(t)$ 通常叫作单位冲量函数或狄拉克(Dirac)函数，它很适用于表达某类脉冲式的强迫项.

自然，狄拉克函数 $\delta(t)$ 在通常的意义下没有拉氏变换. 但是，我们将按照下面的形式方法考虑它的拉氏变换.

首先，可以对 $d_\tau(t)$ 作拉氏变换

$$D_\tau(s)=\mathscr{L}\{d_\tau(t)\}=\int_0^{\infty}e^{-st}d_\tau(t)\,dt=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}e^{-st}dt.$$

从而

$$D_\tau(s)=\frac{1}{\tau s}(1-e^{-\tau s}). \tag{9}$$

其次，我们定义 $\delta(t)$ 的拉氏变换为

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\}=\lim_{\tau\to 0}\mathscr{L}\{d_\tau(t)\}=\lim_{\tau\to 0}D_\tau(s).$$

而

$$\lim_{\tau\to 0}D_\tau(s)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1-e^{-\tau s}}{\tau s}\quad\text{(用洛必达法则)}$$

$$=\lim_{\tau\to 0}\frac{se^{-\tau s}}{s}=1.$$

所以我们得到狄拉克函数$\delta(t)$的拉氏变换

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\}=1. \tag{10}$$

用同样的方法可以考虑$\delta(t-t_0)$. 类似于(7)和(8)，当$t\neq t_0$时，有$\delta(t-t_0)=0$和

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1.$$

我们定义狄拉克函数$\delta(t-t_0)$和连续函数$f(t)$的乘积$\delta(t-t_0)f(t)$的积分如下：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}d_\tau(t-t_0)f(t)dt. \tag{11}$$

利用$d_\tau(t)$的定义和积分中值定理，即得

$$\int_{-\infty}^{\infty}d_\tau(t-t_0)f(t)dt=\frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t_0+\tau}f(t)dt=f(\xi), \tag{12}$$

其中ξ满足$t_0<\xi<t_0+\tau$. 由于当$\tau\to 0$时有$\xi\to t_0$，所以由(11)和(12)，再利用$f(t)$的连续性，推出

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0). \tag{13}$$

作为公式(13)的一个应用，取$f(t)=e^{-st}$，就有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)e^{-st}dt=e^{-st_0}.$$

而当$t_0\geqslant 0$时，得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty}\delta(t-t_0)e^{-st}dt.$$

这就是说，

$$\mathscr{L}\{\delta(t-t_0)\}=e^{-st_0}\quad(t_0\geqslant 0). \tag{14}$$

下面举例说明狄拉克函数的应用.

【例题 1】 求解

$$\begin{cases}y''+2y'+2y=\delta(t-\pi), & (15)\\ y(0)=0,\ \ y'(0)=0. & (16)\end{cases}$$

由方程(15)，有

$$\mathscr{L}\{y''\}+2\mathscr{L}\{y'\}+2\mathscr{L}\{y\}=\mathscr{L}\{\delta(t-\pi)\}.$$

令 $\mathscr{L}\{y\}=Y(s)$，即得

$$[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+2[sY(s)-y(0)]+2Y(s)=e^{-\pi s}.$$

再用初始条件(16)，我们解出

$$Y(s)=\frac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+2}=\frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2+1}.$$

因为

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\}=e^{-t}\sin t,$$

所以

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2+1}\right\}=u_\pi(t)e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi).$$

从而所求的解为

$$y=\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}=u_\pi(t)e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)$$

或

$$y=\begin{cases}0, & \text{当 } 0\leqslant t<\pi;\\ e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi), & \text{当 } t\geqslant\pi.\end{cases}\tag{17}$$

读者不难根据(17)画出所求的解的图形．并且以弹簧为例，来想象它的力学意义，即设一个静止的弹簧在 $t=\pi$ 的一瞬间受到一个垂直方向的冲击而引起振动．

【例题 2】 设 p 和 ω 是正的常数，求解

$$\begin{cases}y''+\omega^2y=p\cdot\delta\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)\sin t;\\ y(0)=0,\ y'(0)=0.\end{cases}$$

用拉氏变换，得到

$$\mathscr{L}\{y''\}+\omega^2\mathscr{L}\{y\}=p\mathscr{L}\left\{\delta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\sin t\right\}.$$

令

$$Y(s)=\mathscr{L}\{y\},$$

由于

$$\mathscr{L}\left\{\delta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\sin t\right\}=e^{-\frac{\pi s}{2}}\sin\frac{\pi}{2}=e^{-\frac{\pi s}{2}},$$

所以推得

$$(s^2+\omega^2)Y(s)=p\cdot e^{-\frac{\pi s}{2}},$$

即
$$Y(s)=\frac{p\cdot e^{-\frac{\pi s}{2}}}{s^2+\omega^2}.$$

从而

$$\begin{aligned}
y&=\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{p\cdot e^{-\frac{\pi s}{2}}}{s^2+\omega^2}\right\}\\
&=\frac{p}{\omega}\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-\frac{\pi s}{2}}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right\}\\
&=\frac{p}{\omega}u_{\frac{\pi}{2}}(t)\sin\omega\left(t-\frac{\pi}{2}\right),
\end{aligned}$$

或
$$y=\begin{cases}0, & \text{当 } 0\leqslant t<\dfrac{\pi}{2};\\[2mm] \dfrac{p}{\omega}\sin\omega\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right), & \text{当 } t\geqslant\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

习 题 6·4

1. 用拉氏变换求解下列初值问题:
   (1) $y''+2y'+2y=\delta(t-\pi)$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$;
   (2) $y''+2y'+y=\delta(t)+u_{2\pi}(t)$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;
   (3) $y''+y=\delta(t-\pi)\cos t$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.
2. 考虑微分方程 $y''+2y'+2y=\delta(t)$,
   (1) 假定 y 是连续的, 而 y' 是分段连续的. 试对这个微分方程从 $t=-\varepsilon$ 到 $t=\varepsilon$ 积分(这里常数 $\varepsilon>0$);
   (2) 令 $\varepsilon\to0$, 证明 $y'(t)$ 在 $t=0$ 处的间断量为 1;
   (3) 用拉氏变换形式地求出这微分方程满足初始条件 $y(0)=0$, $y'(0)=0$ 的解;

(4) 考查在(3)中所求的解，并且验证：当 t 以正值趋于 0 时，它满足初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=1$。这与在(2)中的结果相符合。

第五节　卷　　积

我们知道，如果一个拉氏变换 $H(s)$ 可分解成 $F(s)$ 与 $G(s)$ 的和，其中 $F(s)$ 与 $G(s)$ 分别为 $f(t)$ 与 $g(t)$ 的拉氏变换，那么 $H(s)$ 就是 $f(t)$ 与 $g(t)$ 之和的拉氏变换。现在，如果 $H(s)$ 分解成 $F(s)$ 与 $G(s)$ 的积，那么 $H(s)$ 是否就是 $f(t)$ 与 $g(t)$ 之积的拉氏变换呢？这容易举出一个反例，说明这个问题的答案是否定的，即 $H(s)$ 的拉氏反演变换并不等于函数 $f(t)$ 与 $g(t)$ 的普通乘积。

虽然如此，我们在这一节中的主要目的是定义函数 $f(t)$ 与 $g(t)$ 的一种广义乘积：

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(t-\xi)g(\xi)d\xi. \tag{1}$$

并且证明上述 $H(s)$ 的拉氏反演变换就等于广义乘积

$$f(t)*g(t).$$

通常，由公式(1)定义的广义乘积 $f(t)*g(t)$ 叫做函数 $f(t)$ 与 $g(t)$ 的卷积。注意，卷积仍是 t 的函数。而且容易直接验证，卷积满足下列性质：

1) $f(t)*g(t)=g(t)*f(t)$ （交换律）；

2) $(f(t)*g(t))*h(t)=f(t)*(g(t)*h(t))$ （结合律）；

3) $f(t)*(g(t)+h(t))=f(t)*g(t)+f(t)*h(t)$（分配律）；

4) $0*f(t)=f(t)*0=0$.

卷积的这些性质完全与普通乘积相仿。但是，卷积与普通乘积又有很不一样的特征。例如，在普通乘积中有

$$1\times f(t)=f(t).$$

可是对于卷积，$1*f(t)=f(t)$ 却不一定成立(例如，取 $f(t)=t$)；又如实函数 $f(t)$，对于普通乘积，有 $f(t)\times f(t)\geqslant 0$，可是对于卷积，$f(t)*f(t)\geqslant 0$ 也不一定成立。

现在，我们来证明本节的一个主要定理：

定理 设 $F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}$ 与 $G(s)=\mathscr{L}\{g(t)\}$ 当 $s>k$ 时都存在，则卷积 $f(t)*g(t)$ 的拉氏变换

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)*g(t)\}&=\mathscr{L}\{f(t)\}\cdot\mathscr{L}\{g(t)\}\\&=F(s)\cdot G(s)\end{aligned}\tag{2}$$

当 $s>k$ 时也存在；或

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\}=f(t)*g(t).\tag{3}$$

【证明】 首先，我们注意

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-s\xi}f(\xi)d\xi;$$

$$G(s)=\int_0^\infty e^{-s\eta}g(\eta)d\eta.$$

因此

$$\begin{aligned}F(s)\cdot G(s)&=\int_0^\infty e^{-s\xi}f(\xi)d\xi\cdot\int_0^\infty e^{-s\eta}g(\eta)d\eta\\&=\int_0^\infty g(\eta)\left[\int_0^\infty e^{-s(\xi+\eta)}f(\xi)d\xi\right]d\eta.\end{aligned}\tag{4}$$

对(4)的右端积分，先作积分变量 ξ 的变换

$$\xi+\eta=t\quad(\text{这时 }\eta\text{ 是参量}),$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty g(\eta)\left[\int_0^\infty e^{-s(\xi+\eta)}f(\xi)d\xi\right]d\eta\\&=\int_0^\infty g(\eta)\left[\int_\eta^\infty e^{-st}f(t-\eta)dt\right]d\eta,\end{aligned}\tag{5}$$

其中右端积分是一个累次积分，它的积分区域为图 6-5 中所

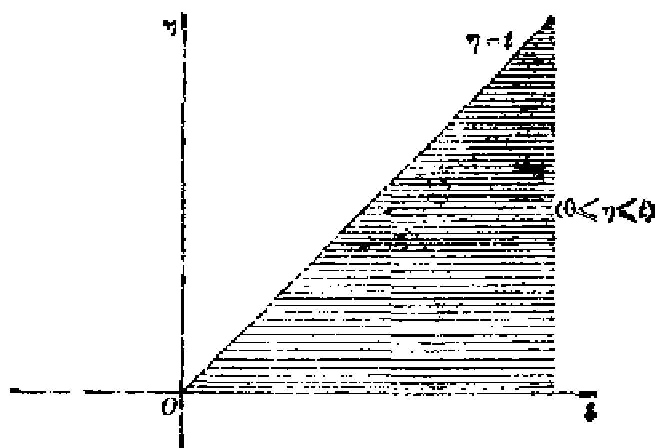


图 6-5

示的阴影部分．我们利用积分次序的交换，得到

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty g(\eta)\left[\int_\eta^\infty e^{-st}f(t-\eta)dt\right]d\eta\\&=\int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t f(t-\eta)g(\eta)d\eta\right]dt\\&=\int_0^\infty e^{-st}f(t)*g(t)dt.\end{aligned}\tag{6}$$

因此，由(4)，(5)和(6)，就证明了

$$F(s)\cdot G(s)=\mathscr{L}\{f(t)*g(t)\},$$

即公式(2)成立，从而公式(3)亦成立．】

【例题 1】 求证

$$\mathscr{L}\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}\quad(s>0;\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).\tag{7}$$

公式(7)曾经在本章第二节的习题6·2第3题中被证明过．在这里，为了熟悉卷积公式，对公式(7)重新再证明一次．

当 $n=0$ 时，公式(7)$\left(亦即\ \mathscr{L}\{1\}=\frac{1}{s}\right)$成立．

假设 $n=k$ 时，公式(7)成立，即

$$\mathscr{L}\{t^k\}=\frac{k!}{s^{k+1}}.\tag{8}$$

因为

$$t^{k+1}=(k+1)\int_0^t t^k dt=(k+1)\int_0^t 1\cdot t^k dt$$
$$=(k+1)\cdot(1*t^k).$$

所以由公式(2)和(8)推出

$$\mathscr{L}\{t^{k+1}\}=(k+1)\mathscr{L}\{1*t^k\}$$
$$=(k+1)\mathscr{L}\{1\}\cdot\mathscr{L}\{t^k\}$$
$$=(k+1)\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{k!}{s^{k+1}}=\frac{(k+1)!}{s^{k+2}},$$

即公式(7)当 $n=k+1$ 时亦成立。从而公式(7)对一切非负的整数 n 都成立。

【例题 2】 试求

$$Y(s)=\frac{1}{s^2(s^2+a^2)} \quad (\text{常数 } a>0)$$

的拉氏反演变换。

因为

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=t;\quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\}=\frac{1}{a}\sin at,$$

所以

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s^2+a^2}\right\}$$
$$=t*\frac{\sin at}{a}=\frac{1}{a}\int_0^t (t-\xi)\sin a\xi\, d\xi$$
$$=\frac{1}{a^3}(at-\sin at).$$

作为本章的结束，同时也作为卷积的一个应用，我们用拉氏变换求解一个比较一般的初值问题：

设微分方程

$$ay''+by'+cy=f(t), \tag{9}$$

其中 a, b 和 c 都是实的常数，而且 $a\neq0$. 假定 $f(t)$是在区间

$0 \leqslant t < \infty$ 上的已知函数. 又设初始条件

$$y(0)=y_0, \quad y'(0)=y'_0. \tag{10}$$

对方程(9)作拉氏变换,我们得到

$$(as^2+bs+c)Y(s)-(as+b)y(0)-ay'(0)=F(s), \tag{11}$$

其中 $Y(s)$ 和 $F(s)$ 分别为 $y(t)$ 和 $f(t)$ 的拉氏变换. 因此

$$Y(s)=\frac{F(s)+(as+b)y_0+ay'_0}{as^2+bs+c}.$$

为了采用拉氏反演公式(3),我们可以把 $Y(s)$ 看作是

$$H(s)=\frac{1}{as^2+bs+c}$$

和 $$G(s)=F(s)+(as+b)y_0+ay'_0$$

的乘积. 按照这一想法,我们将得

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathscr{L}^{-1}\{H(s)\cdot G(s)\} \\ &= \int_0^t h(t-\xi)g(\xi)d\xi, \end{aligned}$$

其中

$$h(t)=\mathscr{L}^{-1}\{H(s)\}, \; g(t)=\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\}.$$

要确定 $H(s)$ 的拉氏反演变换 $h(t)$, 是不困难的(留作习题);为了确定 $g(t)$, 应该有

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{G(s)\} \\ &= \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}+\mathscr{L}^{-1}\{(as+b)y_0+ay'_0\} \\ &= f(t)+\mathscr{L}^{-1}\{(as+b)y_0+ay'_0\}. \end{aligned}$$

可是, 这等式右端第二项的拉氏反演变换当 y_0 和 y'_0 不全为 0 时是不存在的; 至少不存在指数级的函数, 使得它的拉氏变换等于 $(as+b)y_0+y'_0$ (参考第一节习题 4).

这样,我们须要把 $Y(s)$ 重新改写为

$$Y(s)=H(s)F(s)+\frac{(as+b)y_0+ay'_0}{as^2+bs+c},$$

其中右端两项都可作拉氏反演变换，从而有

$$\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathscr{L}^{-1}\{H(s)F(s)\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(as+b)y_0+ay'_0}{as^2+bs+c}\right\}$$
$$=\int_0^t h(t-\xi)f(\xi)d\xi+y_0\varphi(t)+y'_0\psi(t).$$

这里

$$\varphi(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{as+b}{as^2+bs+c}\right\};\quad \psi(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{a}{as^2+bs+c}\right\}.$$

它们是与方程(9)相应的齐次线性方程的两个线性无关的解．所以我们得到所求的解为

$$y(t)=y_0\varphi(t)+y'_0\psi(t)+\int_0^t h(t-\xi)f(\xi)d\xi.$$

第六章小结

通过对这一章的学习，读者应当掌握用拉氏变换求解常系数线性微分方程的方法，并且知道这个方法的主要优点在哪里．下面分别强调一下各节的重点．

1．拉氏变换和拉氏反演变换的定义．拉氏变换和拉氏反演变换都是线性的运算子．指数级函数的拉氏变换一定存在．熟悉表格1的使用．

2．熟悉公式(2)、(4)和(5)．通过具体的例题和习题掌握用拉氏变换求解微分方程初值问题的基本步骤及其主要优点．

3．单位阶梯函数的作用．掌握定理1和定理2的结论及其应用．

4．狄拉克函数的定义及其拉氏变换．熟悉公式(13)及其应用．

5．卷积的定义及其基本性质．掌握有关卷积的拉氏变

换的公式(2)或(3).

最后，将拉氏变换的主要公式列表如下，以便读者查用.

表格 2

编号	$f(t)$	$F(s)$
1	1	$\frac{1}{s}\quad(s>0)$
2	e^{at}	$\frac{1}{s-a}\quad(s>a)$
3	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}\quad(s>0)$
4	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}\quad(s>0)$
5	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}\quad(s>\|a\|)$
6	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}\quad(s>\|a\|)$
7	$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\quad(s>a)$
8	$e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\quad(s>a)$
9	t^n (n 是正整数)	$\frac{n!}{s^{n+1}}\quad(s>0)$
10	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\quad(s>a)$
11	$u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}\quad(s>0)$
12	$u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$
13	$e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
14	$f(ct)\ (c>0)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$
15	$f(t)*g(t)$	$F(s)\cdot G(s)$
16	$\delta(t-c)$	e^{-cs}
17	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$
18	$(-t)^nf(t)$	$F^{(n)}(s)$

第七章

边值问题

对于二阶微分方程式

$$y''=f(x,\ y,\ y'),\tag{1}$$

在前几章中讲了它的初值问题，也就是求它满足初始条件

$$y(x_0)=y_0,\ \ y'(x_0)=y'_0\tag{2}$$

的解．在这一章中我们将举例说明，在实际应用中，对二阶微分方程式(1)须要提出另外一种不同于初始条件的附加条件，例如

$$y(a)=\alpha,\ \ y(b)=\beta,\tag{3}$$

其中 a 与 b 是一个区间 $[a,\ b]$ 的两个边界点（即端点），α 与 β 是两个预先给定的常数．请读者注意，条件(3)与初始条件(2)是很不相同的．对于初始条件(2)的意义，大家已经比较熟悉了．而条件(3)，在本书中还是初次出现，它说的是，要求 $y=y(x)$ 在边界点 a 与 b 上分别取给定的值 α 与 β．我们称条件(3)为**边值条件**；而称(1)+(3)为**边值问题**，也就是求微分方程(1)的满足边值条件(3)的解．一般说来，边值问题要比初值问题复杂．例如，初值问题的解通常总是存在而且是唯一的，可是边值问题的解就不这样单纯了．这一点，读者将会在后面看到．

第一节　比较定理及其推论

在这一节中，我们将用斯托姆的定性方法（它在这里的含

意是直接从微分方程的特性来确定解的某些性质，而不是通过求解的方法)，来研究二阶线性齐次微分方程解的零点分布．所得的结论不仅对后面讨论边值问题时有用，而且对微分方程本身的理论也是很基本的．

设二阶齐次线性微分方程为

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0, \tag{1}$$

其中系数函数 $p(x)$ 与 $q(x)$ 在有界闭区间 $[a, b]$ 上是连续的．

引理 齐次线性微分方程 (1) 的任何非零解 $y=\varphi(x)$ 的零点是孤立的．

【证明】 假设不然，则 $y=\varphi(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上至少有一个非孤立的零点 $x=x_0$，亦即存在 x_n $(a\leqslant x_n\leqslant b)$，使得

$$\varphi(x_n)=0 \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),$$

而且 $x_n\neq x_0$ (当 $n\geqslant 1$) 与 $x_n\to x_0$ (当 $n\to\infty$)．由此推出

$$\varphi'(x_0)=\lim_{x_n\to x_0}\frac{\varphi(x_n)-\varphi(x_0)}{x_n-x_0}=0.$$

因而 $y=\varphi(x)$ 满足初始条件

$$\varphi(x_0)=0,\quad \varphi'(x_0)=0.$$

由初值问题解的唯一性，有 $\varphi(x)\equiv 0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$．这与 $y=\varphi(x)$ 是非零解的假设矛盾．引理得证．】

根据这个引理，用反证法就可推出下面的结论："齐次线性微分方程 (1) 的任何非零解 $y=\varphi(x)$ 在有界闭区间上的零点个数是有限的"．因此，对于 $y=\varphi(x)$ 的任一零点 x_0，我们可以考虑在 x_0 的右 (左) 边距离 x_0 最近的别的零点 x_1 (如果有的话)，并称 x_0 与 x_1 为两个相邻的零点．当然，在相邻零点之间没有别的零点了．

比较定理 设有两个齐次线性微分方程式

$$y''+p(x)y'+Q(x)y=0 \tag{2}$$

与

$$y''+p(x)y'+R(x)y=0, \tag{3}$$

其中系数函数 $p(x)$, $Q(x)$ 与 $R(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是连续的，而且 $R(x)\geqslant Q(x)$. 则在 (2) 的任何非零解 $y=y(x)$ 的任何两个相邻零点 x_1 与 x_2 之间，(3) 的任何非零解 $y=\bar{y}(x)$ 至少有一个零点 $\bar{x}_0$（这里 $\bar{x}_0$ 在 x_1 与 x_2 之间的含意是：$x_1\leqslant\bar{x}_0\leqslant x_2$).

【证明】 假设不然，则在 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 上有 $\bar{y}(x)\neq 0$, 不妨设 $\bar{y}(x)>0$（否则，可用 $y=-\bar{y}(x)$ 取代）. 因此有 $\bar{y}(x_1)>0$ 和 $\bar{y}(x_2)>0$. 同时也不妨设在 $x_1<x<x_2$ 内有 $y(x)>0$. 因此有

$$y(x_1)=0,\ \ y'(x_1)\geqslant 0;\quad y(x_2)=0,\ \ y'(x_2)\leqslant 0.$$

又由于 $y=y(x)$ 是方程 (2) 的非零解，从而推出

$$y'(x_1)>0 \quad 和 \quad y'(x_2)<0.$$

由于 $y=y(x)$和 $y=\bar{y}(x)$分别是(2)和(3)的解，亦即

$$y''(x)+p(x)y'(x)+Q(x)y(x)=0;$$
$$\bar{y}''(x)+p(x)\bar{y}'(x)+R(x)\bar{y}(x)=0.$$

用 $\bar{y}(x)$ 乘第一式减去用 $y(x)$ 乘第二式，得到

$$(\bar{y}(x)y'(x)-\bar{y}'(x)y(x))'+p(x)(\bar{y}(x)y'(x)-\bar{y}'(x)y(x))$$
$$=[R(x)-Q(x)]y(x)\bar{y}(x).$$

它关于 $v=(\bar{y}(x)y'(x)-\bar{y}'(x)y(x))$ 是一个一阶的线性微分方程. 由此可解出

$$\bar{y}(x)y'(x)-\bar{y}'(x)y(x)=e^{-\int_{x_1}^{x}p(x)\,dx}\left\{C+\int_{x_1}^{x}e^{\int_{x_1}^{x}p(x)\,dx}\right.$$
$$\left.\times[R(x)-Q(x)]y(x)\bar{y}(x)\,dx\right\}, \tag{4}$$

其中常数

$$C=\bar{y}(x_1)y'(x_1)-\bar{y}'(x_1)y(x_1)=\bar{y}(x_1)y'(x_1)>0.$$

在(4)式中，令 $x=x_2$，得

$$\bar{y}(x_2)y'(x_2)=e^{-\int_{x_1}^{x_2}p(x)dx}\times\left\{C+\int_{x_1}^{x_2}[R(x)-Q(x)]\,e^{\int_{x_1}^{x}p(x)dx}y(x)\bar{y}(x)dx\right\}.$$

根据上面的讨论和定理的假设可见，此式的左端为负，而右端为正．这一矛盾就证明了本定理．】

根据刚才证明的比较定理，我们可以得出下面的一些推论．

推论1 设 $y=\varphi(x)$ 与 $y=\psi(x)$ 是齐次线性微分方程(1)的两个线性无关的解，则它们的零点(如果有的话)是相互交错的．

事实上，由于 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的伏朗斯基行列式不等于零：

$$\begin{vmatrix}\varphi(x) & \psi(x)\\ \varphi'(x) & \psi'(x)\end{vmatrix}\neq 0\quad(a\leqslant x\leqslant b),$$

所以 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 没有相同的零点．其次，我们取 $R(x)=Q(x)=q(x)$，把 $\varphi(x)$ 看作比较定理中(2)的非零解 $y(x)$，而把 $\psi(x)$ 看作(3)的非零解 $\bar{y}(x)$，就推出，在 $\varphi(x)$ 的两个相邻零点 x_1 与 x_2 之间至少有 $\psi(x)$ 的一个零点 $\bar{x}_0(x_1\leqslant\bar{x}_0\leqslant x_2)$．由于 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 没有相同的零点，所以有 $x_1<\bar{x}_0<x_2$．现在设在 $x_1<x<x_2$ 内有 $\psi(x)$ 的两个相邻的零点 $\bar{x}_0$ 与 $\tilde{x}_0$ $(\bar{x}_0<\tilde{x}_0)$，则用同样的论证可知，在 $\bar{x}_0<x<\tilde{x}_0$ 内至少有 $\varphi(x)$ 的一个零点 x_0．显然，$x_1<x_0<x_2$，这与 x_1 与 x_2 是 $\varphi(x)$ 的两个相邻零点的假定相矛盾．因此推出，在 $\varphi(x)$ 的两个相邻零点 x_1 与 x_2 之间有并且只有 $\psi(x)$ 的一个零点 $\bar{x}_0(x_1<\bar{x}_0<x_2)$．同理可证，在 $\psi(x)$ 的两个相邻零点之间(在严格意义下)有并且只有 $\varphi(x)$ 的一个零点．推论1证完．】

推论2 设微分方程(1)的系数函数 $q(x)\leqslant 0$，则它的任

何非零解 $y=y(x)$ 最多只有一个零点.

事实上，我们可以取 $Q(x)=q(x)\leqslant 0$ 和 $R(x)\equiv 0$，即把方程(1)看作比较定理中的方程(2)，而把方程

$$y''+p(x)y'=0 \tag{5}$$

看作比较定理中的方程(3). 显然，$y=1$ 是方程(5)的一个解. 假设方程(1)[亦即方程(2)]的非零解 $y=y(x)$ 有两个不相同的零点 x_1 和 x_2 $(x_1<x_2)$，则由比较定理推出 $y=1$ 在 x_1 和 x_2 之间至少有一个零点. 这当然是谬误的. 因此，$y=y(x)$ 最多只有一个零点. 推论 2 证完. ∎

现在，设 $y=y(x)$ 是齐次线性微分方程(1)的一个非零解，如果 $y=y(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上最多只有一个零点，则称 $y=y(x)$ 是不振动的；否则，称 $y=y(x)$ 是振动的，即 $y=y(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上至少有两个零点. 现在，考虑在无穷区间 $[a, \infty)$ 或 $(-\infty, a]$ 或 $(-\infty, \infty)$ 上，如果 $y=y(x)$ 有无穷多个零点，则称 $y=y(x)$ 是无限振动的.

推论 2 就是说，当 $q(x)\leqslant 0$ 时，方程(1)的任何非零解都是不振动的. 下面的推论 3 就是通常所说的振动定理.

推论 3 设微分方程

$$y''+Q(x)y=0, \tag{6}$$

其中函数 $Q(x)$ 在无穷区间 $a\leqslant x<\infty$ 上是连续的，而且满足 $Q(x)\geqslant m^2>0$（m 是一个正的常数）. 则方程(6)的任何非零解 $y=\varphi(x)$ 在 $[a, \infty)$ 上有无穷多个零点[即 $y=\varphi(x)$ 是无限振动的]；而且相邻零点的间距不超过 $\frac{\pi}{m}$.

事实上，我们可以把方程(6)与方程

$$y''+m^2y=0 \tag{7}$$

进行比较. 因为 $y=\sin(mx)$ 是方程(7)的一个非零解，它在

区间$[a, \infty)$上有无穷多个零点

$$x_i = \frac{i\pi}{m} \quad (i = i_0, i_0+1, \cdots),$$

这里i_0是不小于ma/π的最小正整数，所以由比较定理推出，方程(6)的任何非零解$y=\varphi(x)$在x_i与x_{i+1}之间至少有一个零点$\bar{x}_i (i=i_0, i_0+1, \cdots)$. 因此，$y=\varphi(x)$有有穷多个零点. 现在，我们把$y=\varphi(x)$的一切零点按大小记作

$$z_1 < z_2 < z_3 < \cdots < z_n < z_{n+1} < \cdots.$$

下面我们证明

$$z_{k+1} - z_k \leqslant \frac{\pi}{m} \quad (k=1, 2, \cdots).$$

假设不然，则存在正整数s，使得

$$z_{s+1} - z_s > \frac{\pi}{m}.$$

由此可取常数α，使得

$$z_s < \alpha < \beta < z_{s+1}, \quad \beta = \alpha + \frac{\pi}{m}.$$

显然，$y=\sin m(x-\alpha)$是方程(7)的一个非零解，并且$x=\alpha$与β是它的两个相邻的零点. 因此，由比较定理推出，在$\alpha \leqslant x \leqslant \beta$上，$y=\varphi(x)$至少有一个零点，从而在$z_s$与$z_{s+1}$之间还有$y=\varphi(x)$的零点. 这是矛盾的. 因此，$z_{k+1}-z_k \leqslant \frac{\pi}{m} (k=1, 2, \cdots)$. 推论3得证. ▌

注意 如果只假定$Q(x)>0$，则推论3的结论不一定成立. 例如，微分方程

$$y'' + \frac{1}{4x^2} y = 0 \quad (1 \leqslant x < \infty)$$

的非零解$y=\sqrt{x}(C_1 \log x + C_2)$最多只有一个零点.

习 题 7-1

1. 在比较定理中，设 $R(x)>Q(x)$，则定理的结论可加强到 $\bar{x}_0$ 满足 $x_1<\bar{x}_0<x_2$.

2. 设在推论 3 中再令 $Q(x)\leqslant M^2$，则

$$\frac{\pi}{M}\leqslant z_{k+1}-z_k\leqslant\frac{\pi}{m}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots).$$

3* 利用比较定理证明：贝塞耳函数有无穷多个零点；并且相邻零点的间距趋于 π（当 $x\to\infty$）.

第二节 边值问题的提法和特征值

在常微分方程的应用中，除了初值问题外，有时还须要考虑另一种不同类型的问题——边值问题．我们在这一节中要举一个具体的例子，来说明边值问题的实际意义．

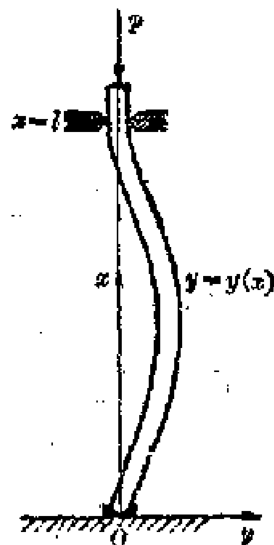


图 7-1

【例题 1】 柱的弯曲：设有一根长柱，以铰链联接于点 $x=l$，而以支承固定于点 $x=0$（参考图 7-1）．当柱子受到一轴向载荷 p 的作用时，试考虑柱子的弯曲．

设柱子的中心曲线为 $y=y(x)$，则可由力学定律推出 $y=y(x)$ 满足微分方程

$$-IE\frac{d^2y}{dx^2}=py,$$

其中 E 是杨氏模数，I 是惯性矩．令

$$\lambda=p,\quad Q(x)=\frac{1}{IE},$$

则上面的微分方程可写成

$$y''+\lambda Q(x)y=0. \tag{1}$$

显然，$y=y(x)$ 须满足边值条件

$$y(0)=0,\quad y(l)=0. \tag{2}$$

所以本来考虑的柱弯曲问题就转变为考虑边值问题(1)+(2)了.

当柱子不弯曲时，即 $y(x)=0(0\leqslant x\leqslant l)$ 是边值问题(1)+(2)的解，而且它应该是唯一的解；而当柱子弯曲时，边值问题(1)+(2)应该有非零解 $y=y(x)$（即 $y=y(x)$ 满足(1)+(2)，但是 $y(x)\neq 0$).

设 $Q(x)$ 是正的连续函数，令

$$\max_{0\leqslant x\leqslant l} Q(x)=M,$$

则 $M>0$. 由比较定理推出，边值问题(1)+(2)的非零解 $y=y(x)$ 的零点间距 $l\geqslant\pi/\sqrt{\lambda M}$. 因此，当 $l<\pi/\sqrt{\lambda M}$, 亦即

$$\lambda<\frac{1}{M}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \tag{3}$$

时，边值问题(1)+(2)无非零解. 这就是说，当压力 p 不甚大时$\left[\text{只要 } p<\frac{1}{M}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\right]$，柱子是不会弯曲的. 这是符合力学直观的，而且不等式(3)对于考虑柱子的载荷是有参考价值的.

由力学的直观可以看出，当压力 p 增加到某个临界值 p_0 时，柱子将要弯曲. 也就是说，当 $\lambda=p_0$ 时，边值问题(1)+(2)有非零解. 而这一点在数学上并不是显然的.

以下我们研究更一般的问题：设微分方程

$$(p(x)y')'+[\lambda r(x)+q(x)]y=0, \tag{4}$$

其中 λ 是参数，$p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ 和 $r(x)$ 是 x 在区间 $[a, b]$ 上的连续函数，而且 $p(x)>0$ 与 $r(x)>0$. 又设边值条件

$$\begin{aligned} &y(a)\cos\alpha-y'(a)\sin\alpha=0,\\ &y(b)\cos\beta-y'(b)\sin\beta=0, \end{aligned} \tag{5}$$

其中常数 α 与 β 满足 $0\leqslant\alpha<\pi$ 与 $0<\beta\leqslant\pi$.

通常称(4)+(5)为斯托姆和刘维尔边值问题，简称为 SL 边值问题. 例如，上面的柱子弯曲问题，即 (1)+(2) 是一个 SL 边值问题。

当 $\lambda=\lambda_0$ 时，边值问题(4)+(5)有非零解 $y=\varphi_0(x)$，则称 λ_0 为边值问题(4)+(5)的一个特征值，而 $y=\varphi_0(x)$ 为相应于 λ_0 的一个特征函数. 容易看出，若 $y=\varphi_0(x)$ 是相应于 λ_0 的一个特征函数，则对于任何非零的常数 C, $y=C\varphi_0(x)$ 也同样是特征函数.

【例题 2】 求边值问题

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0 \quad (\lambda \text{ 是参数}), \\ y(0)=0,\ y(l)=0 \quad (\text{常数 } l>0) \end{cases}$$

的特征值及其特征函数.

当 $\lambda<0$ 时，令 $\lambda=-K^2(K>0)$，则微分方程的通解为

$$y=c_1e^{Kx}+c_2e^{-Kx}.$$

由边值条件推出

$$\begin{cases} c_1+c_2=0, \\ c_1e^{Kl}+c_2e^{-Kl}=0. \end{cases}$$

由第一式可见 $c_1=-c_2$, 代入第二式，得

$$c_1(e^{Kl}-e^{-Kl})=0.$$

因为 $e^{Kl}\neq e^{-Kl}$, 所以 $c_1=0$, 从而 $c_2=0$. 这就是说，当 $\lambda<0$ 时，上述边值问题只有零解($y=0$). 因此，当 $\lambda<0$ 时无特征值.

当 $\lambda=0$ 时，微分方程变为 $y''=0$, 它的通解为

$$y=c_1x+c_2,$$

代入边值条件，推出 $c_2=0$ 和 $c_1=0$, 从而得 $y=0$. 所以 $\lambda=0$ 也不是特征值.

当 $\lambda>0$ 时，令 $\lambda=R^2(R>0)$，则微分方程的通解为

$$y=c_1\cos Rx+c_2\sin Rx.$$

代入边值条件 $y(0)=0$，即得 $c_1=0$. 因此，边值问题的非零解一定为 $y=c_2\sin Rx$，其中 $c_2\neq 0$. 再由 $y(l)=0$，推出 $c_2\sin Rl=0$，从而

$$\sin Rl=0.$$

由此推出 $Rl=n\pi$ $(n=1, 2, \cdots)$，即

$$\lambda=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad (n=1, 2, \cdots)$$

是特征值，相应的特征函数为

$$y=C\sin\frac{n\pi}{l}x \quad (n=1, 2, \cdots),$$

其中 C 是非零的任意常数.

对于简单的边值问题，如例题 2，我们不难通过求解，求出特征值和特征函数. 但是，对于一般的边值问题(4)+(5)，我们不能这样做. 下面从理论上证明它的特征值是**存在的**. 如果读者没有充分的阅读时间，可以跳过这部分内容，而直接进入下一节.

在适当的变换下（参考本节习题 3*），我们可以把上述 SL 边值问题写成如下形式:

$$\begin{cases} y''+(\lambda+q(x))y=0; & (6) \\ y(0)\cos\alpha-y'(0)\sin\alpha=0, & \\ y(1)\cos\beta-y'(1)\sin\beta=0. & (7) \end{cases}$$

这里函数 $q(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上是连续的，而且常数 α 与 β 满足 $0\leqslant\alpha<\pi$ 与 $0<\beta\leqslant\pi$.

设 $y=\varphi(x;\ \lambda)$ 是微分方程(6)的解，而且满足初值条件

$$\varphi(0;\ \lambda)=\sin\alpha,\quad \varphi'(0;\ \lambda)=\cos\alpha. \tag{8}$$

显然，$y=\varphi(x;\ \lambda)$ 是 (6) 的一个非零解. 因此推出函数

$$\rho(x;\ \lambda)=\sqrt{[\varphi(x;\ \lambda)]^2+[\varphi'(x;\ \lambda)]^2}>0.$$

由(8)可见，$y=\varphi(x;\ \lambda)$满足(7)中的第一个条件；令

$$\varphi(x;\ \lambda)=\rho(x;\ \lambda)\sin\theta(x;\ \lambda);\ \varphi'(x;\ \lambda)=\rho(x;\ \lambda)\cos\theta(x;\ \lambda),$$

则

$$\theta(x;\ \lambda)=\operatorname{arc\,tg}\frac{\varphi(x;\ \lambda)}{\varphi'(x;\ \lambda)}\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$$

满足条件

$$\theta(0;\ \lambda)=\alpha+l\pi\quad(l\text{ 是某个整数}).$$

欲使 $y=\varphi(x;\ \lambda)$ 满足 (7) 中的第二个条件，只需且必须 $\theta=\theta(x;\ \lambda)$ 满足条件

$$\theta(1;\ \lambda)=\beta+m\pi\quad(m\text{ 是某个整数}).\tag{9}$$

对于任意的参数 λ，条件(9)不一定成立. 从上面的推导可见，λ 是边值问题(6)+(7)的特征值当且仅当(9)式成立.

因为

$$\begin{aligned}\theta'(x;\ \lambda)&=\frac{[\varphi'(x;\ \lambda)]^2-\varphi(x;\ \lambda)\cdot\varphi''(x;\ \lambda)}{[\varphi(x;\ \lambda)]^2+[\varphi'(x;\ \lambda)]^2}\\&=\{[\rho(x;\ \lambda)\cdot\cos\theta(x;\ \lambda)]^2+(\lambda+q(x))\\&\quad\times[\rho(x;\ \lambda)\sin\theta(x;\ \lambda)]^2\}/[\rho(x;\ \lambda)]^2.\end{aligned}$$

所以 $\theta=\theta(x;\ \lambda)$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上满足微分方程

$$\theta'=\cos^2\theta+(\lambda+q(x))\sin^2\theta.\tag{10}$$

并且，为了确定起见，不妨令 $\theta=\theta(x;\ \lambda)$满足初值条件

$$\theta(0;\ \lambda)=\alpha.\tag{11}$$

引理1 令 $\omega(\lambda)=\theta(1;\ \lambda)$，则 $\omega=\omega(\lambda)$是 λ 的严格递增的连续函数.

【证明】 利用第三章中关于解对参数 λ 的可微性定理，可以证明初值问题(10)+(11)的解 $\theta=\theta(x;\ \lambda)$关于参数 λ 是连续可微的. 因此，可以对方程(10)的两边对 λ 求偏导数，从

而得到

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\right)=(\lambda+q(x)-1)\sin 2\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}+\sin^2\theta. \tag{12}$$

又由(11)可知

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\right|_{x=0}=\theta'_\lambda(0;\ \lambda)=0. \tag{13}$$

我们注意到(12)是关于 $\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}$ 的一阶线性微分方程，因此可以由(12)和(13)解出

$$\theta'_\lambda(x;\ \lambda)=e^{\int_0^x(\lambda+q(x)-1)\sin 2\theta dx}\times\int_0^x e^{-\int_0^x(\lambda+q(x)-1)\sin 2\theta dx}(\sin\theta)^2dx.$$

由此可见，当 $0<x\leqslant 1$ 时，有 $\theta'_\lambda(x;\ \lambda)>0$. 特别

$$\omega'(\lambda)=\theta'_\lambda(1;\ \lambda)>0.$$

引理1得证. 】

引理2 $\omega(\lambda)>0(-\infty<\lambda<\infty)$；并且

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\omega(\lambda)=0.$$

【证明】 由(11)推出，存在 $x_0(0<x_0\leqslant 1)$，使得

$$\theta(x;\ \lambda)>0\quad(0<x\leqslant x_0). \tag{14}$$

事实上，当 $\alpha>0$ 时，这是显然的；当 $\alpha=0$ 时，由 (10) 推出 $\theta'(0;\ \lambda)=1$. 因此，上述 x_0 的存在性也是显然的.

而且我们可进一步证明，不等式(14)在 $0<x\leqslant 1$ 上成立. 因为否则，由(14)推出，存在 $x_1>x_0(x_1\leqslant 1)$，使得当 $0<x<x_1$ 时，有 $\theta(x;\ \lambda)>0$，但 $\theta(x_1;\ \lambda)=0$，由此，$\theta'(x_1;\ \lambda)\leqslant 0$. 另一方面，由(10)推出 $\theta'(x_1;\ \lambda)=1$. 这是矛盾的. 因此，有

$$\theta(x;\ \lambda)>0\quad(0<x\leqslant 1).$$

特别，
$$\omega(\lambda)=\theta(1;\ \lambda)>0\quad(-\infty<\lambda<\infty).$$

其次，任给 $\varepsilon>0\left(设\ \varepsilon<\frac{\pi}{4},\ \varepsilon<\pi-\alpha\right)$. 令

$$H^2=(1+\pi-2\varepsilon)/\sin^2\varepsilon;$$

$$M=\max q(x)\quad(0\leqslant x\leqslant 1),$$

则当 $\lambda<-H^2-M$ 时，有

$$\lambda+q(x)<-H^2\quad(0\leqslant x\leqslant 1).\tag{15}$$

由(11)与 $\alpha<\pi-\varepsilon$ 推出，存在 $\bar{x}_0(0<\bar{x}_0\leqslant 1)$，使得积分曲线 $\theta=\theta(x;\lambda)$ 当 $0<x\leqslant x_0$ 时，在直线 AB 的下侧（参看图 7-2）.

如果 $\theta=\theta(x;\lambda)$ 与直线 AB 第一次交于 $x=x_1$，则斜率 $\theta'(x_1;\lambda)\geqslant$直线 AB 的斜率

$$K=2\varepsilon-\pi.$$

另一方面，由(10)与(15)推出

$$\theta'(x_1;\ \lambda)<1-H^2\sin^2\varepsilon$$
$$=2\varepsilon-\pi.$$

这是矛盾的. 因此，$\theta=\theta(x;\lambda)$ 与直线 AB 不相交，而在它的下侧. 从而 $\theta(1;\lambda)<\varepsilon$，亦即 $\omega(\lambda)<\varepsilon$（当 $\lambda<-H^2-M$ 时）. 注意，当 $\varepsilon\to 0$ 时，$H\to\infty$. 引理 2 得证. 】

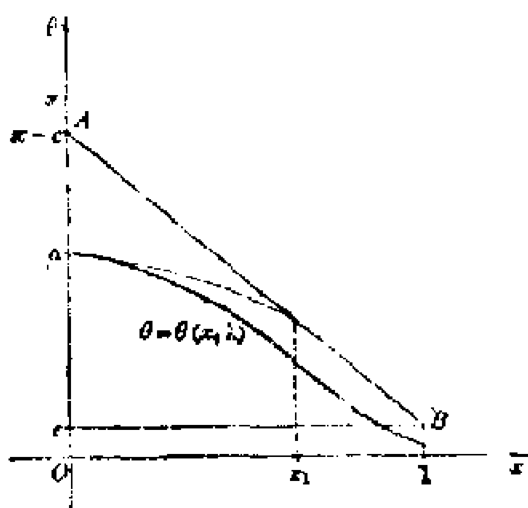


图 7-2

引理 3 当 $\lambda\to\infty$ 时，有 $\omega(\lambda)\to\infty$.

【证明】 任给 $N>0$，存在 $K>0$，使得当 $\lambda>K$ 时，有

$$\lambda+q(x)>N^2\quad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

由(10)推出，$\theta=\theta(x;\lambda)$满足不等式

$$\theta'\geqslant\cos^2\theta+N^2\sin^2\theta>0,$$

或

$$\frac{\theta'}{\cos^2\theta+N^2\sin^2\theta}\geqslant 1.$$

在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上积分此不等式，且利用 $\theta(1;\lambda)=\omega(\lambda)$，即得

$$\int_0^1 \frac{\theta'}{\cos^2\theta+N^2\sin^2\theta}\,dx=\int_\alpha^{\omega(\lambda)}\frac{d\theta}{\cos^2\theta+N^2\sin^2\theta}\geqslant 1. \tag{16}$$

假设引理 3 的结论不对，则由 $\omega(\lambda)$ 的单调上升性推出，$\omega(\lambda)\leqslant L<\infty$（$L$ 是正的常数）．由(16)推出

$$f(N)=\int_0^L \frac{d\theta}{\cos^2\theta+N^2\sin^2\theta}\geqslant 1. \tag{17}$$

另一方面，又易知：当 $N\to\infty$ 时，

$$f(N)=\frac{1}{N}\operatorname{arc\,tg}(N\operatorname{tg}L)\to 0.$$

这与(17)矛盾．因此，引理 3 得证． ▌

根据上面的分析，我们可以作出 $\omega=\omega(\lambda)$ 的示意图（如图 7-3）．

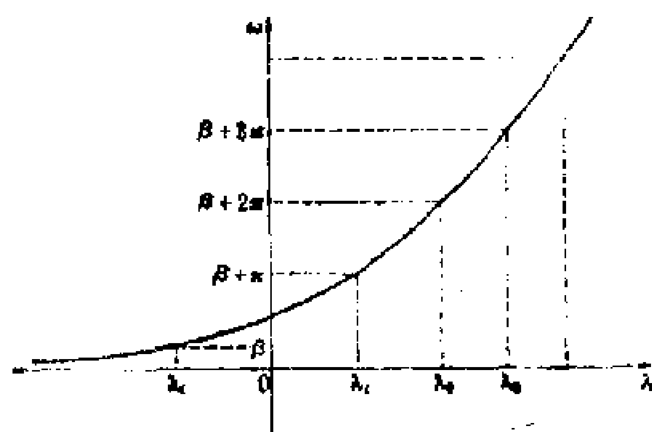


图 7-3

因此，存在

$$\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_m<\cdots, \tag{18}$$

使得 $\lambda_m\to\infty$（当 $m\to\infty$ 时）；而且

$$\omega(\lambda_m)=\beta+m\pi$$

$$(m=0,1,2,\cdots).$$

即 $\lambda=\lambda_m$ 满足 (9)，亦即 $\lambda=\lambda_m$ 是边值问题 (6)+(7) 的第 $m+1$ 个特征值．

我们把上面所得结果总结成下面的定理：

定理 SL 边值问题 (6)+(7) 的特征值是存在的；并且这些特征值 $\{\lambda_m\}$ 满足(18)．

习 题 7.2

1．求下列 SL 边值问题的特征值及其特征函数：

(1) $y''+\lambda y=0$; $y'(0)=0$, $y'(1)=0$.

(2) $y''+\lambda y=0$; $y(0)=0$, $y'(1)=0$.

2. 证明边值问题

$$x^2y''-\lambda xy'+\lambda y=0;\quad y(1)=0,\ y(2)=0,$$

无特征值. [提示: 这是欧拉方程, 令 $x=e^t$.]

3* 设边值问题

$$\begin{cases} y''+p(x)y'+[\lambda r(x)+q(x)]y=0; \\ \alpha y(a)+\beta y'(a)=0,\ \gamma y(b)+\delta y'(b)=0, \end{cases}$$

其中 $p(x)$, $q(x)$ 与 $r(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上是连续的, 且 $r(x)>0$. 又设 $p(x)$ 与 $r(x)$ 有二阶连续的导数, 试作变换

$$y=H(x)u,\quad t=G(x),$$

适当选取 $H(x)$ 与 $G(x)$, 把上述边值问题化成

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2}+(\lambda_1+Q(t))u=0; \\ u(0)\cos\alpha-u'(0)\sin\alpha=0,\quad u(1)\cos\beta-u'(1)\sin\beta=0. \end{cases}$$

第三节 特征函数系的正交性

本节讨论 SL 边值问题的特征函数系. 我们先看一看上一节中例题 2 的结果; 即 SL 边值问题

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, & (1) \\ y(0)=0,\quad y(l)=0 & (2) \end{cases}$$

的无穷多个特征值为

$$\lambda=\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\quad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

对应于每个特征值 λ_n, 只有一个线性无关的特征函数

$$y=\varphi_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

所以我们得到边值问题(1)+(2)的无穷多个特征函数

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \cdots,\ \varphi_n(x),\ \cdots. \tag{3}$$

而且易知

$$\int_0^l \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = \int_0^l \sin\frac{i\pi}{l}x\cdot\sin\frac{j\pi}{l}x\,dx$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{当 } i \neq j; \\ \dfrac{l}{2} \neq 0, & \text{当 } i = j. \end{cases}$$

即特征函数系 (3) 在区间 $0 \leqslant x \leqslant l$ 上组成一个正交系. 由傅里叶级数理论我们知道，在某些充分条件下，可以把一个函数 $f(x)$ 用正交函数系(3)进行展开，即

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

其中傅里叶系数

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \quad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

下面我们把这些具体的结果推广到一般的 SL 边值问题：

$$\begin{cases} y'' + (\lambda + q(x))y = 0; & (4) \\ y(0)\cos\alpha - y'(0)\sin\alpha = 0, & \\ y(1)\cos\beta - y'(1)\sin\beta = 0, & (5) \end{cases}$$

其中有关的条件完全同上一节中的边值问题(6)+(7).

根据上节最后的特征值存在定理可知，边值问题(4)+(5)有无穷多个特征值

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots \quad (\lambda_n \to \infty).$$

对于每个特征值 λ_n，有特征函数

$$y = C\cdot\varphi(x;\ \lambda_n),$$

其中 C 是任意非零的常数. 这里自然会提出一个问题：对于特征值 λ_n，除了特征函数 $y=\varphi(x;\ \lambda_n)$ 外，是否还有与 $y=\varphi(x;\ \lambda_n)$ 线性无关的其他特征函数？注意，$y=C\cdot\varphi(x;\ \lambda_n)$

与 $y=\varphi(x;\ \lambda_n)$ 显然是线性相关的. 下面的引理解答了这个问题.

引理 1 对于每一个特征值 λ_n, 边值问题 (4)+(5) 只有一个线性无关的特征函数.

【证明】 设 $y=\varphi(x)$ 与 $y=\psi(x)$ 是对应于特征值 $\lambda=\lambda_n$ 的任何两个特征函数. 因此, 它们是齐次线性微分方程

$$y''+(\lambda_n+q(x))y=0$$

的两个非零解. 特别, 它们要满足:

$$\begin{cases}\varphi(0)\cos\alpha-\varphi'(0)\sin\alpha=0,\\ \psi(0)\cos\alpha-\psi'(0)\sin\alpha=0.\end{cases}$$

由此不难推出

$$\varphi(0)\psi'(0)-\psi(0)\varphi'(0)=0.$$

这就是说, $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的伏朗斯基行列式在 $x=0$ 处的值为零. 因此, 它们是线性相关的; 亦即, 对应于特征值 λ_n, 只有一个线性无关的特征函数. ▌

由此可见, 除去常数因子外, 边值问题 (4)+(5) 的全部特征函数系为 $\{\varphi(x;\ \lambda_n),\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$. 令

$$\varphi_n(x)=\varphi(x;\ \lambda_n)\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots). \tag{6}$$

下面证明特征函数系 (6) 在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上组成一个正交系.

引理 2 当 $j\neq k$ 时, 积分

$$\int_0^1\varphi_j(x)\varphi_k(x)dx=0. \tag{7}$$

【证明】 因为

$$\varphi_j''(x)+(\lambda_j+q(x))\varphi_j(x)=0,$$
$$\varphi_k''(x)+(\lambda_k+q(x))\varphi_k(x)=0,$$

所以有

$$\varphi_j''(x)\varphi_k(x)-\varphi_k''(x)\varphi_j(x)+(\lambda_j-\lambda_k)\varphi_j(x)\varphi_k(x)=0,$$

即

$$(\lambda_j-\lambda_k)\varphi_j(x)\varphi_k(x)=[\varphi_k'(x)\varphi_j(x)-\varphi_j'(x)\varphi_k(x)]'.$$

两边取积分，得到

$$(\lambda_j-\lambda_k)\int_0^1\varphi_j(x)\varphi_k(x)dx=[\varphi_k'(1)\varphi_j(1)-\varphi_j'(1)\varphi_k(1)]$$
$$-[\varphi_k'(0)\varphi_j(0)-\varphi_j'(0)\varphi_k(0)].$$

利用条件

$$\begin{cases}\varphi_j(0)\cos\alpha-\varphi_j'(0)\sin\alpha=0,\\ \varphi_k(0)\cos\alpha-\varphi_k'(0)\sin\alpha=0,\end{cases}$$

可以推出 $\varphi_k'(0)\varphi_j(0)-\varphi_j'(0)\varphi_k(0)=0$. 同样可证 $\varphi_k'(1)\varphi_j(1)-\varphi_j'(1)\varphi_k(1)=0$. 因此，我们得到

$$(\lambda_j-\lambda_k)\int_0^1\varphi_j(x)\varphi_k(x)dx=0.$$

当 $j\neq k$ 时，有 $\lambda_j\neq\lambda_k$, 所以(7)式成立. 引理2证完. ▌

由于 $\varphi_k(x)$ 是非零解，而且是实函数，所以积分

$$\int_0^1\varphi_k^2(x)dx=\sigma_k>0.$$

令

$$\psi_k(x)=\frac{1}{\sqrt{\sigma_k}}\varphi_k(x)\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots). \tag{8}$$

由上面的讨论可见下述定理成立.

定理 边值问题 (4)+(5) 的特征函数系 (8) 在区间 $0\leqslant x\leqslant1$ 上组成一个规范的正交系；即

$$\int_0^1\psi_j(x)\psi_k(x)dx=\delta_{jk},$$

这里 δ_{jk} 是克朗内克(Kronecker)记号(即当 $j\neq k$ 时，$\delta_{jk}=0$; 而当 $j=k$ 时，$\delta_{jk}=1$).

因此，类似于正交的三角函数系，我们可以考虑在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的某类分段光滑的函数 $f(x)$ 关于正交的特征函数系(8)的广义傅里叶展开

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\psi_n(x),$$

其中广义傅里叶系数

$$a_n=\int_0^1 f(x)\psi_n(x)dx \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

【例题】 试求边值问题

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0 & (9)\\ y(0)+y'(0)=0,\ y(1)=0 & (10)\end{cases}$$

的特征值与相应的特征函数；并且讨论函数 $f(x)$ 在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上关于该特征函数系的广义傅里叶展开.

当 $\lambda<0$ 时，可令 $\lambda=-R^2(R>0)$，则(9)的通解为

$$y=C_1e^{Rx}+C_2e^{-Rx},$$

代入边值条件(10)，得

$$\begin{cases}(1+R)C_1+(1-R)C_2=0\\ e^RC_1+e^{-R}C_2=0,\end{cases} \tag{11}$$

它的系数行列式为

$$U(R)=\begin{vmatrix}1+R & 1-R\\ e^R & e^{-R}\end{vmatrix}=R(e^R+e^{-R})-(e^R-e^{-R}).$$

因为 $U'(R)=R(e^R-e^{-R})>0$（当 $R>0$），而且 $U(0)=0$，所以当 $R>0$ 时，$U(R)>0$. 从而由(11)推出 $c_1=0$，$c_2=0$. 即当 $\lambda<0$ 时，边值问题(9)+(10)只有零解，所以 $\lambda(<0)$ 不可能是特征值.

当 $\lambda=0$ 时，方程(9)的通解为

$$y=c_1x+c_2,$$

代入边值条件(10)，得

$$c_2+c_1=0 \quad (与\ c_1+c_2=0).$$

这代数方程有非零解 $c_1=-c_2(c_2\neq0)$；从而，方程(9)有非零解 $y=c_1(x-1)$，其中常数 $c_1\neq0$. 所以 $\lambda_0=0$ 是一个特征值，相应的一个特征函数为

$$\overline{\varphi}_0(x)=x-1.$$

当 $\lambda>0$ 时，令 $\lambda=R^2(R>0)$，则方程(9)的通解为

$$y=c_1\sin Rx+c_2\cos Rx,$$

代入边值条件(10)，得到联立方程组

$$\begin{cases} c_1R+c_2=0, \\ c_1\sin R+c_2\cos R=0. \end{cases} \tag{12}$$

它的系数行列式为

$$D(R)=\begin{vmatrix} R & 1 \\ \sin R & \cos R \end{vmatrix}=R\cos R-\sin R.$$

因为(12)有非零解的充要条件是 $D(R)=0$，即

$$R=\operatorname{tg} R \quad (R>0). \tag{13}$$

由此推出，$\lambda=R^2$ 是特征值的充要条件是：R 满足方程(12).

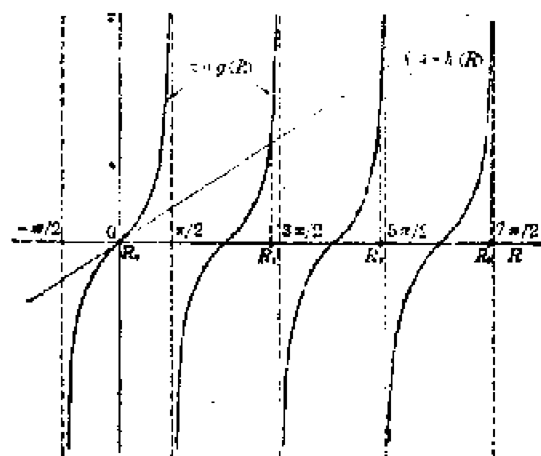


图 7-4

我们注意到方程(13)不是普通的代数方程，而是一个超越方程.

现在用作图法求方程(13)的(近似)根. 令 $g(R)=\operatorname{tg} R$ 与 $h(R)=R$，因此方程(13)的根相当于这两条曲线 $z=g(R)$ 与 $z=h(R)$ 的交点的横坐标，参考图 7-4.

方程(13)的正根就是图中标出的 $R_1, R_2, R_3, \cdots$. 所以

当 $\lambda>0$ 时，得到特征值 $\lambda_1=R_1^2$, $\lambda_2=R_2^2$, $\lambda_3=R_3^2$, $\cdots$, 而且从图中看出，当 n 充分大时，有渐近式

$$\lambda_n\approx\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4}.$$

对应于每个特征值 $\lambda_n=R_n^2(n=1,\ 2,\ \cdots)$, 联立方程(12)的两个等式是相关的，我们可以只考虑第一式，即

$$c_1R_n+c_2=0.$$

令 $c_1=1$, 则 $c_2=-R_n$. 因此得到相应的一个特征函数

$$\bar{\varphi}_n(x)=\sin R_nx-R_n\cos R_nx.$$

注意，图中 $R_0=0$ 也是 $z=g(R)$ 与 $z=h(R)$ 的一个交点的横坐标，但是它不属于 $\lambda>0$ 的范围内；虽然 $\lambda_0=R_0^2=0$ 也是一个特征值，不过它属于 $\lambda=0$ 的讨论范围. 另外，如果不限制 $R>0$, 则 $-R_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 也是方程(13)的根. 而对应的值仍旧是 $\lambda_n=(-R_n)^2$.

根据上面的讨论，我们求出边值问题(9)+(10)的全部特征值为

$$\lambda_0=0,\ \lambda_1=R_1^2,\ \lambda_2=R_2^2,\ \cdots,\ \lambda_n=R_n^2,\ \cdots$$

以及相应的一串特征函数

$$\bar{\varphi}_0(x),\ \bar{\varphi}_1(x),\ \bar{\varphi}_2(x),\ \cdots,\ \bar{\varphi}_n(x),\ \cdots,$$

它们在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上组成一个正交系. 容易算出

$$\int_0^1[\bar{\varphi}_0(x)]^2dx=\int_0^1(x-1)^2dx=\frac{1}{3}=\sigma_0>0$$

和

$$\int_0^1[\bar{\varphi}_n(x)]^2dx=\int_0^1[\sin R_nx-R_n\cos R_nx]^2dx$$

$$=\frac{1}{2}[(R_n^2-1)+(R_n^2+1)\cos^2R_n]$$

$$=\sigma_n>0.$$

(注意，当 $n\geqslant1$ 时，有 $R_n^2>1$；而且在计算过程中，用到关系式 $\sin R_n=R_n\cos R_n$.)

因此，我们有广义的傅里叶展开

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\bar{\varphi}_n(x),$$

而傅里叶系数 a_n 可由公式

$$a_n=\frac{1}{\sigma_n}\int_0^1 f(x)\bar{\varphi}_n(x)dx$$

进行计算.

习 题 7.3

1. 求解下列 SL 边值问题:

   (1) $y''+\lambda y=0$; $y(0)=0$, $y(\pi)+y'(\pi)=0$;

   (2) $y''+\lambda y=0$; $y(0)-y'(0)=0$, $y(1)+y'(1)=0$.

2* 在研究均匀梁的横振动时，须要讨论微分方程

$$\frac{d^4y}{dx^4}-\lambda^4y=0$$

满足下列边值条件(a)[或(b)；或(c)]的非零解:

(a) $y(0)=y''(0)=0$, $y(l)=y''(l)=0$;

(b) $y(0)=y''(0)=0$, $y(l)=y'(l)=0$;

(c) $y(0)=y'(0)=0$, $y''(l)=y'''(l)=0$.

试分别求上述边值问题的特征值和特征函数.

第四节　一个非线性边值问题的特例

在这一节中，我们准备用一个具体的例子来说明线性边值问题和非线性边值问题的某些有趣的特性.

【例题】 钢条的弯曲. 设在水平桌面上有一均匀的薄钢条，在两端施加大小相等而方向相反的一对水平压力 p. 试

讨论钢条的弯曲.

显然，当 p 很小时，钢条在桌面上不会弯曲；当 p 适当大时，钢条就会弯曲，如图 7-5.

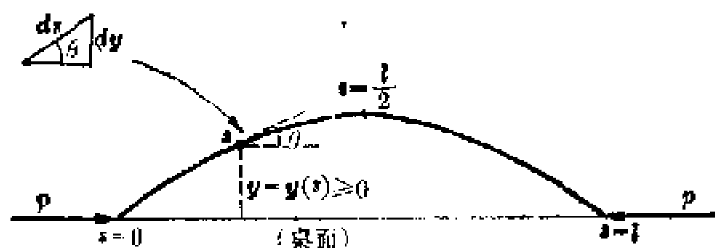


图 7-5

设钢条的长度为 l. 我们取钢条上任何一点，设它距左端点的钢条(弧)长为 s，则以 s 为该点的参数坐标. 因此，左端点与右端点的坐标分别为 $s=0$ 与 $s=l$，而钢条的中点坐标为 $\frac{l}{2}$，如此等等. 又设在 s 点的切线的倾角为 θ，则 $\frac{d\theta}{ds}$ 代表在该点的弯曲率；设在 s 点钢条离桌面的高度为 $y=y(s)$，则在 s 点所受的弯曲矩为 py.

由实验总结出来的钢条弯曲定律是：在 s 点的弯曲率 $\frac{d\theta}{ds}$ 正比于在该点的弯曲矩 py，即

$$\frac{d\theta}{ds}=-k(py), \tag{1}$$

其中比例常数 $k>0$，右端负号是考虑到左端 $\frac{d\theta}{ds}\leqslant 0$. 令 $B=1/k$，称 B 为钢条的刚度.

设 $|\theta|<\frac{\pi}{2}$，则由 $\frac{dy}{ds}=\sin\theta$ 推出

$$\frac{d^2y}{ds^2}=\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{ds}=\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\cdot\frac{d\theta}{ds}. \tag{2}$$

由(1)和(2)，我们得到钢条的弯曲方程为

$$\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{p}{B}\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\cdot y=0. \tag{3}$$

另一方面，由图 7-5 可见，$y=y(s)$满足边值条件

$$y(0)=0,\ y(l)=0. \tag{4}$$

有实际意义的问题是：求钢条弯曲的临界压力 p_0. 当 $p<p_0$ 时，边值问题(3)+(4)只有零解. 而当 $p>p_0$ 时，它有非零解. 从力学直观看，这非零解应该是唯一的.

对于小弯曲，即

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\ll 1$$

时，方程(3)显然可以线性化，从而得到线性微分方程

$$\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{p}{B}y=0. \tag{5}$$

因为 $y=y(s)\geqslant 0$, 所以边值问题(5)+(4)当且仅当

$$p=p_0=\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\cdot B$$

时才有非零解

$$y=C\sin\frac{\pi}{l}s\quad(\text{任意常数 } C>0). \tag{6}$$

这样，我们用线性化的方法得到下面三个结论：

1) 当 $p<p_0$ 时，钢条不能弯曲；而当 $p=p_0$ 时，钢条要弯曲(即 p_0 是临界压力)；

2) 当 $p=p_0$ 时，边值问题(5)+(4)的非零解(6)是不唯一的；亦即钢条的弯曲形状是不确定的；

3) 当 $p>p_0$ 时，钢条不能弯曲.

经验告诉我们，结论 1) 是符合实际的，而结论 2)，尤其 3)是不符合事实的. 这说明了线性化方法的局限性.

现在，我们直接来分析非线性微分方程(3). 令 $y=y(s)$

是(3)的解，且满足初值条件

$$y(0)=0,\quad y'(0)=u_0>0. \tag{7}$$

求解非线性边值问题(3)+(4)归结于选取 u_0，使得 $y(l)=0$. 为此，令 $u=\frac{dy}{ds}$，则 $\frac{d^2y}{ds^2}=u\frac{du}{dy}$. 因此，由方程(3)，我们有

$$\frac{udu}{\sqrt{1-u^2}}+\frac{p}{B}y\,dy=0 \quad (\text{设 } u\neq\pm1).$$

从而求得第一积分

$$-2\sqrt{1-u^2}+\frac{p}{B}y^2=C. \tag{8}$$

利用初值条件 (7) 推出 $C=-2\sqrt{1-u_0^2}$. 又由图 7-5 可见，$y'\left(\frac{l}{2}\right)=0$，且 $y=y(s)$ 关于 $s=\frac{l}{2}$ 是对称的，因此 $y\left(\frac{l}{2}\right)=m>0$ 是最大值；亦即 $y=y(s)$ 也满足初值 $y\left(\frac{l}{2}\right)=m$，$y'\left(\frac{l}{2}\right)=0$. 因此，由(8)推出，$C$ 也等于 $-2\sqrt{1-u_0^2}$；即

$$-2+\frac{p}{B}m^2=-2\sqrt{1-u_0^2}.$$

再从(8)解出

$$u=\sqrt{1-\left(\frac{p}{2B}y^2-\frac{C}{2}\right)^2}\quad \left(0\leqslant s\leqslant\frac{l}{2}\right)$$

或

$$ds=\left[1-\left(\frac{p}{2B}y^2-\frac{C}{2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}dy.$$

两边积分，得到

$$s=\int_0^y\left[1-\left(\frac{p}{2B}y^2+\sqrt{1-u_0^2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}dy.$$

它表示 $y=y(s)$ 的反函数. 特别，当 $s=\frac{l}{2}$ 时，我们得到

$$\frac{l}{2}=\int_0^m\left[1-\left(\frac{p}{2B}y^2+\sqrt{1-u_0^2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}dy.$$

令 $\xi=1-\sqrt{1-u_0^2}$，则 $0<\xi<1$；再令 $v=\frac{p}{2B}y^2+\sqrt{1-u_0^2}$，则当 $y=0$ 时，有 $v=1-\xi$；当 $y=m$ 时，有 $v=1$。同时，上述积分就化为如下形式

$$\frac{l}{2}=\sqrt{\frac{2B}{p}}\int_{1-\xi}^1\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}\ \sqrt{(2-\xi)+\xi v}}$$

或

$$p=\left[\frac{2}{l}F(\xi)\right]^2B, \tag{9}$$

其中

$$F(\xi)=\sqrt{2}\int_{1-\xi}^1\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}\ \sqrt{(2-\xi)+\xi v}}\quad(0\leqslant\xi\leqslant1).$$

可以通过直接的微分推出 $F'(\xi)>0(0<\xi<1)$；因此 $F(\xi)$ 是 ξ 的严格上升函数，从而由(9)推出：边值问题(3)+(4)有非零解的必要条件为

$$\left[\frac{2}{l}F(0)\right]^2B<p<\left[\frac{2}{l}F(1)\right]^2B. \tag{10}$$

不难看出，条件(10)也是充分的．注意，不等式(10)的左端恰好是临界压力 $p_0=\left(\frac{\pi}{l}\right)^2B$，而右端对应于 $\xi=1$，亦即 $\theta(0)=\frac{\pi}{2}$，它恰好破坏了对 θ 的限制：$|\theta|<\frac{\pi}{2}$．

由此可见，我们从非线性边值问题(3)+(4)得到的一些结论要比线性化的一些结果更合乎实际．

第七章小结

本章首先用具体的例子说明，在求解微分方程时，除了在

前几章中我们已经熟悉的那种初值条件外，还出现了另一种(边值)条件．前一种问题就是初值问题，而后一种问题就叫边值问题．读者应该通过具体的例子明了这两类问题的提法和差别．在本章中，读者应重点掌握下列内容：

1．简单边值问题的求解法(通过一些例题和习题)．

2．什么叫SL边值问题？它的特征值和特征函数具有哪些性质？

3．通过钢条弯曲的例题，明了线性边值问题和非线性边值问题的某些特性．

第八章

一阶线性微分方程组

在前几章里，我们研究了只含一个未知函数的 n 阶微分方程式. 在某些实际问题和一些理论的研究中，未知函数往往不止一个，而联系未知函数的微分方程式也不止一个. 这时，就出现了一组微分方程式，即微分方程组. 在第一节中，我们先列举一些微分方程组的例子，并且叙述有关的初值问题及其解的存在性和唯一性定理.

第一节 微 分 方 程 组

我们先举几个简单的微分方程组的例子.

【例题 1】 设微分方程组

$$\frac{dy}{dx}=2y-z,\quad \frac{dz}{dx}=y+2z+e^{x},\tag{1}$$

其中 x 是自变量，y 和 z 是两个未知函数.

【例题 2】 设微分方程组

$$\frac{d^2u}{dt^2}-\frac{du}{dt}-v=0,\quad \frac{dv}{dt}+v-u=0,\tag{2}$$

其中 t 是自变量，u 和 v 是两个未知函数.

【例题 3】 三体问题. 我们来研究某一行星 P 绕太阳 S 的运动. 为了简单起见，假定行星 P 除受太阳的吸引力外，只受某一邻近的卫星（或行星）Q 的吸引力，而其他天体对行星 P 的影响一概忽略不计. 此外，还假定 P, Q 和 S 都是圆

球体，它们的质量都集中于球心，我们不考虑它们的自转，而把它们当作质点进行研究．试讨论 S, P 和 Q 的运动（这就是历史上著名的三体问题）．

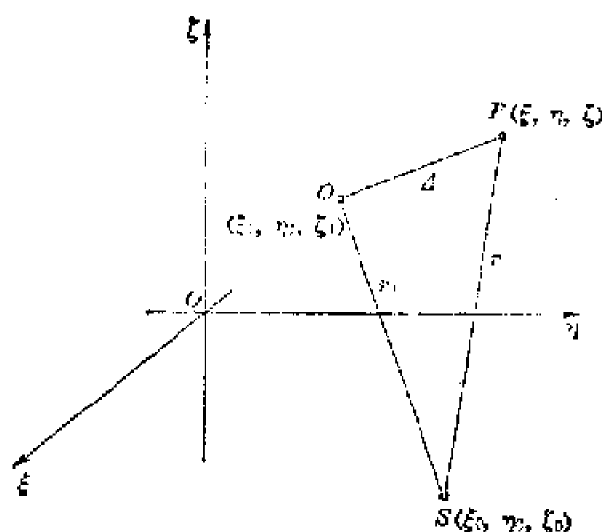


图 8-1

我们选定一个参考系 $O\xi\eta\zeta$．设太阳 S、行星 P 和卫星 Q 的坐标分别为 (ξ_0, η_0, ζ_0)、(ξ, η, ζ) 和 (ξ_1, η_1, ζ_1)（参看图 8-1），它们的质量分别为 m_0、m 和 m_1；又设行星 P 和卫星 Q 跟太阳 S 的距离分别为 r 和 r_1，而行星 P 和卫星 Q 的距离记作 Δ.

根据牛顿万有引力定律，行星 P 受到太阳 S 和卫星 Q 对它的吸引力，其合力为

$$\boldsymbol{F}=-Gmm_0\left(\frac{\xi-\xi_0}{r^3}, \frac{\eta-\eta_0}{r^3}, \frac{\zeta-\zeta_0}{r^3}\right)-Gmm_1\left(\frac{\xi-\xi_1}{\Delta^3}, \frac{\eta-\eta_1}{\Delta^3}, \frac{\zeta-\zeta_1}{\Delta^3}\right).$$

这里 G 为引力常数．而行星 P 的运动加速度为

$$\boldsymbol{a}=(\ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\zeta}) \quad \left(\cdot \text{ 表示 } \frac{d}{dt}\right).$$

由牛顿的第二运动定律 $m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}$，消去 m，再用分量形式写出，得

$$\begin{cases} \ddot{\xi}=-Gm_0\dfrac{\xi-\xi_0}{r^3}-Gm_1\dfrac{\xi-\xi_1}{\Delta^3}, \\ \ddot{\eta}=-Gm_0\dfrac{\eta-\eta_0}{r^3}-Gm_1\dfrac{\eta-\eta_1}{\Delta^3}, \\ \ddot{\zeta}=-Gm_0\dfrac{\zeta-\zeta_0}{r^3}-Gm_1\dfrac{\zeta-\zeta_1}{\Delta^3}. \end{cases} \tag{3}$$

考虑太阳的运动加速度($\ddot{\xi}_0$, $\ddot{\eta}_0$, $\ddot{\zeta}_0$)，同样可以得到

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_0 = -Gm\dfrac{\xi_0-\xi}{r^3} - Gm_1\dfrac{\xi_0-\xi_1}{r_1^3}, \\ \ddot{\eta}_0 = -Gm\dfrac{\eta_0-\eta}{r^3} - Gm_1\dfrac{\eta_0-\eta_1}{r_1^3}, \\ \ddot{\zeta}_0 = -Gm\dfrac{\zeta_0-\zeta}{r^3} - Gm_1\dfrac{\zeta_0-\zeta_1}{r_1^3}. \end{cases} \tag{4}$$

我们主要研究行星 P 对太阳 S 的运动. 为此，将坐标原点移至 S，而坐标轴的方向不变. 这样，就建立了一个新的坐标系 $Sxyz$. 设在这个坐标系中，P 和 Q 的坐标分别为(x, y, z)和(x_1, y_1, z_1)，则

$$x=\xi-\xi_0,\quad y=\eta-\eta_0,\quad z=\zeta-\zeta_0;$$

$$x_1=\xi_1-\xi_0,\ y_1=\eta_1-\eta_0,\ z_1=\zeta_1-\zeta_0;$$

$$r^2=x^2+y^2+z^2,\quad r_1^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2;$$

$$\Delta^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2.$$

把(3)和(4)的第一式、第二式和第三式分别相减，得到

$$\begin{cases} \ddot{x}+G(m_0+m)\dfrac{x}{r^3} = -Gm_1\dfrac{x-x_1}{\Delta^3} - Gm_1\dfrac{x_1}{r_1^3}, \\ \ddot{y}+G(m_0+m)\dfrac{y}{r^3} = -Gm_1\dfrac{y-y_1}{\Delta^3} - Gm_1\dfrac{y_1}{r_1^3}, \\ \ddot{z}+G(m_0+m)\dfrac{z}{r^3} = -Gm_1\dfrac{z-z_1}{\Delta^3} - Gm_1\dfrac{z_1}{r_1^3}. \end{cases} \tag{5}$$

注意
$$\frac{x-x_1}{\Delta^3} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\Delta}\right),\quad \frac{y-y_1}{\Delta^3} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\Delta}\right),$$

$$\frac{z-z_1}{\Delta^3} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\Delta}\right);$$

$$\frac{x_1}{r_1^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xx_1+yy_1+zz_1}{r_1^3}\right),\quad \frac{y_1}{r_1^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xx_1+yy_1+zz_1}{r_1^3}\right),$$

$$\frac{z_1}{r_1^3} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{xx_1+yy_1+zz_1}{r_1^3}\right).$$

令 $\mu=(m_0+m)G$ 和 $R=G\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{xx_1+yy_1+zz_1}{r_1^3}\right)$,

那么(5)可以改写为

$$\begin{cases}\ddot{x}+\mu\frac{x}{r^3}=m_1\frac{\partial R}{\partial x},\\ \ddot{y}+\mu\frac{y}{r^3}=m_1\frac{\partial R}{\partial y},\\ \ddot{z}+\mu\frac{z}{r^3}=m_1\frac{\partial R}{\partial z},\end{cases}\tag{6}$$

其中 x, y 和 z 是未知函数. 我们注意到,在 R 中还包含未知函数 x_1, y_1 和 z_1. 因此, (6) 不是一个独立的微分方程组, 它须要与 x_1、y_1 和 z_1 满足的那组类似的方程联立组成一个独立的微分方程组,这是比较复杂的. 因为我们不准备研究它,所以就不把这个完全的微分方程组写出来了.

一般而言,卫星的质量 m_1 要比太阳的质量 m 小得多, 从而 $m_1\ll\mu$. 因此, 在(6)中可以把 m_1 近似地看作 0, 就有

$$\begin{cases}\ddot{x}+\frac{\mu x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=0,\\ \ddot{y}+\frac{\mu y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=0,\\ \ddot{z}+\frac{\mu z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=0,\end{cases}\tag{7}$$

其中 x, y 和 z 是未知函数. 微分方程组(7)也就是行星 P 关于太阳 S 的运动方程组. 这实际上是一个"二体问题". 关于微分方程组(7)的求解问题将在下一章讨论.

从上面三个例子,即方程组 (1)、(2) 和 (7),我们注意到,在每个微分方程组中, 方程式的个数总是与未知函数的个数相同的, 而各个未知函数的导数的最高阶数可以参差不一. 例如,在微分方程组(1)和(7)中,各个未知函数的导数的最高

阶数分别为一和二；而在微分方程组(2)中，未知函数 u 和 v 的最高导数的阶是不相同的；前者的阶为二，而后者为一.

为了对微分方程组的讨论规范化，我们可以引进新的(中间)未知函数，使得在新的微分方程组中，各个未知函数的最高阶导数都是一阶的.

例如，对于微分方程组(2)，令

$$\frac{du}{dt}=w$$

为中间未知函数，则(2)可写成一个新的等价微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=w,\\[2mm] \dfrac{dv}{dt}=u-v,\\[2mm] \dfrac{dw}{dt}=w+v.\end{cases}\tag{8}$$

对于微分方程组(7)，令

$$\dot{x}=u,\quad \dot{y}=v,\quad \dot{z}=w$$

为中间未知函数，则(7)可写成一个新的等价微分方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=u,\ \dot{y}=v,\ \dot{z}=w,\\[2mm] \dot{u}=-\dfrac{\mu x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\\[2mm] \dot{v}=-\dfrac{\mu y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\\[2mm] \dot{w}=-\dfrac{\mu z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.\end{cases}\tag{9}$$

又例如，对于一般的 n 阶微分方程式

$$\frac{d^ny}{dx^n}=f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots,\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right),\tag{10}$$

令

$$y_1=y,\ y_2=\frac{dy}{dx},\ \cdots,\ y_n=\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}.$$

则容易证明(10)等价于一个有 n 个未知函数的一阶微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx}=y_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx}=y_n, \\ \dfrac{dy_n}{dx}=f(x,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n). \end{cases} \tag{11}$$

根据以上的说明,不失一般性,我们可以只讨论下面形式的一阶微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=F_1(x,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx}=F_2(x,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx}=F_n(x,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n), \end{cases} \tag{12}$$

其中 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$ 是 n 个未知函数,而 $F_1,\ F_2,\ \cdots,\ F_n$ 都是关于变量 $x,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$(在允许的范围内)的实值函数. 例如,微分方程组(1)、(8)、(9)和(11)都是微分方程组(12)的特例.

设函数组

$$y_1=\varphi_1(x),\ y_2=\varphi_2(x),\ \cdots,\ y_n=\varphi_n(x) \tag{13}$$

在区间 $\alpha<x<\beta$ 上连续可微,而且满足(12),即

$$\varphi_i'(x)=F_i(x,\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \cdots,\ \varphi_n(x))$$
$$(\alpha<x<\beta;\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

则称函数组(13)为微分方程组(12)的**一个解**. 而且, 如果它满足

$$\varphi_1(x_0)=a_1,\ \varphi_2(x_0)=a_2,\ \cdots,\ \varphi_n(x_0)=a_n,$$

则称(13)满足*初始条件*

$$y_1(x_0)=a_1,\ y_2(x_0)=a_2,\ \cdots,\ y_n(x_0)=a_n. \tag{14}$$

初值问题(12)+(14)表示求微分方程(12)满足初始条件(14)的解. 为了保证初值问题(12)+(14)的解是存在而且唯一的, 正如在第三章中的存在唯一性定理一样, 须要对函数 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 附加一定的条件.

定理 1 设函数 $F_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$在区域

$$D:\ |x-x_0|\leqslant a,\ |y_1-a_1|\leqslant b,\ |y_2-a_2|\leqslant b,\ \cdots,\ |y_n-a_n|\leqslant b$$

上连续, 而且对 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 适合李氏条件:

$$|F_i(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n)-F_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)|$$

$$\leqslant K_i\sum_{l=1}^{n}|\bar{y}_l-y_l|,$$

其中李氏常数 $K_i>0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$. 那么, 存在正数 $h\leqslant a$, 使得初值问题(12)+(14)在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上有一个并且只有一个解.

这个定理的证明完全可以仿照第三章中比卡定理的证明方法, 为了节省篇幅, 在这里就不重复了. 当然, 读者如果能够重新对这个定理进行一次证明, 则肯定是有益的.

我们还要指出, h 一般可能要比 a 小, 即微分方程组解的存在性也只是局部的.

在微分方程组 (12) 中, 如果函数 F_i 关于 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是线性的, 即

$$F_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) = a_{i1}(x)y_1 + a_{i2}(x)y_2 + \cdots + a_{in}(x)y_n + f_i(x) \quad (i=1, 2, \cdots, n),$$

则有

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x). \end{cases} \tag{15}$$

我们称(15)为一阶线性微分方程组.若函数$f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$, $f_n(x)$ 都恒等于 0, 亦即

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}(x)y_1 + a_{i2}(x)y_2 + \cdots + a_{in}(x)y_n \quad (i=1, 2, \cdots, n), \tag{16}$$

则称(16)是齐次的(线性微分方程组); 如果$f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$, $f_n(x)$ 不都恒等于 0, 则称(15)是非齐次的. 通常, 称$f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$, $f_n(x)$为(15)的非齐次项(或强迫函数).

例如, (1)和(8)都是一阶线性微分方程组, 前者是非齐次的, 后者是齐次的, 而(9)是一个非线性的一阶微分方程组.

对于线性微分方程组, 我们可以证明比上述定理 1 更强的结论, 即解的存在区间不是局部的.

定理 2 设线性微分方程组 (15) [包括 (16)] 中的函数 $a_{ij}(x)$, $f_i(x)$在区间 $\alpha<x<\beta$ 上连续 $(i, j=1, 2, \cdots, n)$. 又设 x_0 满足 $\alpha<x_0<\beta$. 则对于任给的初始条件 (14), 微分方程组(15)在区间 $\alpha<x<\beta$ 上有一个解

$$y_1=\varphi_1(x),\ y_2=\varphi_2(x),\ \cdots,\ y_n=\varphi_n(x)$$

满足(14), 而且这样的解只有一个.

这一章的主要内容是介绍线性微分方程组的一般理论和常系数线性微分方程组的解法，实际上是第四章内容的推广。在下一节中，先介绍一种求解微分方程组的消去法。

习 题 8·1

1. 设初值问题为
$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x);\quad y(x_0)=a,\ y'(x_0)=b.$$
试把它化成一个一阶线性微分方程组的初值问题。

2. 设初值问题为
$$\begin{cases} y'=y+z+e^x, & z'=y-z; \\ y(0)=0, & z(0)=0. \end{cases}$$
试把这个初值问题改变成只含一个未知函数的二阶微分方程式的初值问题。

3. 已知 $y_1=u_1(x)$, $y_2=u_2(x)$, $\cdots$, $y_n=u_n(x)$ 和 $y_1=v_1(x)$, $y_2=v_2(x)$, $\cdots$, $y_n=v_n(x)$ 是齐次线性微分方程组 (16) 的两个解，则对于任意的常数 A 和 B，线性组合
$$y_1=Au_1(x)+Bv_1(x),\ y_2=Au_2(x)+Bv_2(x),\ \cdots,$$
$$y_n=Au_n(x)+Bv_n(x)$$
仍是(16)的解(迭加原理)。

4. 设 $y_1=u_1(x)$, $y_2=u_2(x)$, $\cdots$, $y_n=u_n(x)$ 是齐次线性微分方程组 (16) 的任何一个解，又 $y_1=\varphi_1(x)$, $y_2=\varphi_2(x)$, $\cdots$, $y_n=\varphi_n(x)$ 是非齐次线性微分方程组(15)的一个特解，则
$$y_1=u_1(x)+\varphi_1(x),\ y_2=u_2(x)+\varphi_2(x),\ \cdots,\ y_n=u_n(x)+\varphi_n(x)$$
是非齐次线性微分方程组(15)的一个解。

第二节 消 去 法

求解常系数线性微分方程组的最初等的方法是消去法；这就是说，只保留一个未知函数，而用微分法消去其余的未知

函数，最后得到一个只含一个未知函数的高阶常系数的线性微分方程式. 对于后者的解法，我们是熟悉的. 因此可以求出这个被保留的未知函数. 然后，再根据消去的过程，求出其余的未知函数. 对于小型的微分方程组（即未知函数的个数较少的方程组），采用这种消去法是比较简便的.

【例题 1】 试用消去法求解

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-5y, & (1)\\ \dfrac{dy}{dt}=2x-y. & (2)\end{cases}$$

我们准备保留 $x=x(t)$，而消去 $y=y(t)$. 由(1)解出

$$y=\frac{1}{5}\left(x-\frac{dx}{dt}\right), \tag{3}$$

再代入(2)，得

$$\frac{1}{5}\left(\frac{dx}{dt}-\frac{d^2x}{dt^2}\right)=2x-\frac{1}{5}\left(x-\frac{dx}{dt}\right).$$

化简后，得到

$$\frac{d^2x}{dt^2}+9x=0.$$

这是一个常系数的二阶线性微分方程式，容易求出它的通解

$$x=c_1\cos 3t+c_2\sin 3t.$$

再利用在消去过程中的关系式(3)，得

$$\begin{aligned}y&=\frac{1}{5}\left[(c_1\cos 3t+c_2\sin 3t)-(-3c_1\sin 3t+3c_2\cos 3t)\right]\\ &=c_1\left(\frac{1}{5}\cos 3t+\frac{3}{5}\sin 3t\right)+c_2\left(\frac{1}{5}\sin 3t-\frac{3}{5}\cos 3t\right).\end{aligned}$$

因此，微分方程组(1)+(2)的通解为

$$\begin{cases}x=c_1\cos 3t+c_2\sin 3t,\\ y=c_1\dfrac{\cos 3t+3\sin 3t}{5}+c_2\dfrac{\sin 3t-3\cos 3t}{5},\end{cases} \tag{4}$$

其中 c_1 与 c_2 是两个任意常数.

如果不是先消去 y，而是消去 x，那么同样可以求得微分方程组(1)+(2)的通解，它的任意常数可能在形式上与(4)中的不一样；但是总可以把它们化成一样.

对于高阶的微分方程组，有时也可以用消去法求解.

【例题 2】 求解微分方程组

$$\begin{cases}(y_1''+y_1'-y_1)+(y_2''-3y_2'+2y_2)=0, & (5)\\ (y_1'+2y_1)+(2y_2'-4y_2)=0. & (6)\end{cases}$$

如果准备消去未知函数 y_2，那么应该设法依次消去 y_2''、y_2' 和 y_2. 为此，对(6)求导，得到

$$(y_1''+2y_1')+(2y_2''-4y_2')=0. \tag{7}$$

再用 2 乘(5)式减去(7)式，得

$$(y_1''-2y_1)+(-2y_2'+4y_2)=0. \tag{8}$$

为了消去 y_2，只要把(6)式和(8)式相加，就得

$$y_1''+y_1'=0. \tag{9}$$

这是一个只含未知函数 y_1 的二阶线性微分方程式，它的通解为

$$y_1=c_1+c_2e^{-x}. \tag{10}$$

代入(6)式，得

$$y_2'-2y_2=-c_1-\frac{1}{2}c_2e^{-x}. \tag{11}$$

这是一个关于未知函数 y_2 的一阶线性微分方程式，我们容易求出它的通解为

$$y_2=\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{6}c_2e^{-x}+c_3e^{2x}.$$

因此，我们得到

$$\begin{cases}y_1=c_1+c_2e^{-x},\\ y_2=\dfrac{1}{2}c_1+\dfrac{1}{6}c_2e^{-x}+c_3e^{2x}.\end{cases} \tag{12}$$

从上面的推导可见，(12)一定满足(6)式，至于它是否也满足(5)式？ 这只要直接把(12)代入(5)式，易见回答是肯定的．因此，(12)就是所求的通解．

如果在上面的解法中，不是把(10)代入(6)式，而是代入(5)式，则得

$$y_2''-3y_2'+2y_2=c_1+c_2e^{-x}.$$

这是一个关于 y_2 的二阶微分方程式，我们容易求出它的通解为

$$y_2=\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{6}c_2e^{-x}+c_3e^{2x}+c_4e^x.$$

从而得

$$\begin{cases} y_1=c_1+c_2e^{-x}, \\ y_2=\dfrac{1}{2}c_1+\dfrac{1}{6}c_2e^{-x}+c_3e^{2x}+c_4e^x. \end{cases} \tag{13}$$

从上面的推导可见，(13)一定满足(5)式，至于它是否满足(6)式？ 把(13)直接代入(6)式，即得

$$-c_2e^{-x}+2(c_1+c_2e^{-x})+2\left(\frac{-1}{6}c_2e^{-x}+2c_3e^{2x}+c_4e^x\right)$$
$$-4\left(\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{6}c_2e^{-x}+c_3e^{2x}+c_4e^x\right)=0.$$

化简后，得

$$-2c_4e^x=0.$$

这个等式只有当 $c_4=0$ 时才能成立． 因此，我们得到通解为

$$\begin{cases} y_1=c_1+c_2e^{-x}, \\ y_2=\dfrac{1}{2}c_1+\dfrac{1}{6}c_2e^{-x}+c_3e^{2x}. \end{cases}$$

它与前面所求的通解(12)完全一致． 我们提请注意，(13)并不是所求的通解，其中 c_4 是一个多余的任意常数．这一点是须要通过验算之后才能知道的．

从这个例子可以看出，微分方程组的消去法很难作为一般的理论进行讨论．而且对于大型的微分方程组，消去法是非常麻烦的．所以，我们只要求读者通过上面两个例子的启发，能够对一些小型的微分方程组应用消去法求解．这种消去法的技巧在某些实际问题的应用中也是常见的．

最后，顺便指出，在上一节我们已经知道，只含一个未知函数的 n 阶微分方程式总可以化成含 n 个未知函数的一阶微分方程组．反之，含 n 个未知函数的一阶微分方程组在大多数情况下也可以用消去法化成一个只含一个未知函数的 n 阶微分方程式．但是，也有一些例外的情况，例如，设微分方程组

$$\frac{dy}{dx}=a(x)z,\quad \frac{dz}{dx}=b(x)y, \tag{14}$$

其中 $a(x)$ 和 $b(x)$ 是连续函数，但不是可微的．这就不能用消去法把 (14) 化成只含一个未知函数的二阶微分方程式．所以，一阶微分方程组要比一个未知函数的高阶微分方程式更具一般性．

习　题　8·2

1．用消去法求解下列微分方程组：

(1) $\dfrac{dx_1}{dt}=x_1+x_2,\ \dfrac{dx_2}{dt}=4x_1-2x_2;$

(2) $\dfrac{dx_1}{dt}=x_1+x_2+2e^t,\quad \dfrac{dx_2}{dt}=4x_1+x_2-e^t;$

(3) $\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=2x_1-5x_2-\sin 2t,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1-2x_2+t;\quad x_1(0)=0,\ x_2(0)=1;\end{cases}$

(4) $\dfrac{dx_1}{dt}=x_1,\ \dfrac{dx_2}{dt}=-x_2+\sqrt{2}x_3,\ \dfrac{dx_3}{dt}=\sqrt{2}x_2;$

$$
(5)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=x_1+x_2+x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=2x_1+x_2-x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt}=-8x_1-5x_2-3x_3. \end{cases}
$$

2. 求解下列微分方程组，从而确定它们是否有解：

$$
(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}+\dfrac{dx_2}{dt}+x_2=t, \\ \dfrac{dx_1}{dt}+\dfrac{dx_2}{dt}+x_2=t+2; \end{cases}
$$

$$
(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}+2x_1+\dfrac{dx_2}{dt}+2x_2=e^{2t}, \\ \dfrac{dx_1}{dt}-2x_1+\dfrac{dx_2}{dt}-2x_2=e^{-2t}. \end{cases}
$$

第三节　齐次线性微分方程组

我们在这一节讨论齐次线性微分方程组

$$
\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=a_{11}(x)y_1+a_{12}(x)y_2+\cdots+a_{1n}(x)y_n, \\ \dfrac{dy_2}{dx}=a_{21}(x)y_1+a_{22}(x)y_2+\cdots+a_{2n}(x)y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx}=a_{n1}(x)y_1+a_{n2}(x)y_2+\cdots+a_{nn}(x)y_n, \end{cases} \tag{1}
$$

其中系数函数 $a_{ij}(x)$ 在区间 $\alpha<x<\beta$ 上连续($i, j=1, 2, \cdots, n$)．因此，对于方程组(1)的初值问题可以应用第一节中的定理 2．现在的目的是要搞清楚齐次线性微分方程组的通解的一般结构．讨论的主要线索与第四章对二阶齐次线性微分方程式的讨论相仿．

为了方便，我们采用向量和矩阵的记号．令 n 维函数向量

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix},$$

其导数向量

$$\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{y}'(x)=\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}.$$

这里"$'$"表示 $\frac{d}{dx}$，所以也记作

$$\boldsymbol{y}'=\frac{d\boldsymbol{y}}{dx}.$$

又令函数矩阵

$$A(x)=\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

这样，微分方程组(1)可以改写成它的等价形式

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

或

$$\boldsymbol{y}'=A(x)\boldsymbol{y}. \tag{2}$$

我们用记号 $\mathscr{S}$ 表示齐次线性微分方程组 (2) [亦即 (1)] 的所有的解组成的集合，即

$$\mathscr{S}=\{\boldsymbol{y}(x)\,|\,\boldsymbol{y}'(x)=A(x)\boldsymbol{y}(x),\ \alpha<x<\beta\}.$$

设 $\boldsymbol{0}$ 表示 n 维零向量，易知 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 是方程 (2) 的一个解，即

$\mathbf{0}\in\mathscr{S}$. 所以集合 $\mathscr{S}$ 不是空集.

定理 1 $\mathscr{S}$ 是一个线性空间.

【证明】 设 $\boldsymbol{y}_1(x)$和 $\boldsymbol{y}_2(x)\in S$, 即对一切 $x\in(\alpha, \beta)$, 有

$$\boldsymbol{y}_1'(x)=A(x)\boldsymbol{y}_1(x) \quad \text{和} \quad \boldsymbol{y}_2'(x)=A(x)\boldsymbol{y}_2(x).$$

因此, 对于任意的常数 c_1 和 c_2, 有

$$\begin{aligned}(c_1\boldsymbol{y}_1(x)+c_2\boldsymbol{y}_2(x))' &= c_1\boldsymbol{y}_1'(x)+c_2\boldsymbol{y}_2'(x)\\ &= c_1A(x)\boldsymbol{y}_1(x)+c_2A(x)\boldsymbol{y}_2(x)\\ &= A(x)(c_1\boldsymbol{y}_1(x)+c_2\boldsymbol{y}_2(x)).\end{aligned}$$

这就是说, $c_1\boldsymbol{y}_1(x)+c_2\boldsymbol{y}_2(x)\in\mathscr{S}$, 亦即 $\mathscr{S}$ 满足迭加原理. 因此, $\mathscr{S}$ 是一个线性空间. 】

为了进一步讨论 $\mathscr{S}$ 的结构, 我们还需要对函数向量组引进线性相关和线性无关的概念.

设在区间 $\alpha<x<\beta$ 上给定 k 个 n 维的函数向量

$$\boldsymbol{\varphi}_1(x), \boldsymbol{\varphi}_2(x), \cdots, \boldsymbol{\varphi}_k(x). \tag{3}$$

若存在 k 个不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$, 使得

$$c_1\boldsymbol{\varphi}_1(x)+c_2\boldsymbol{\varphi}_2(x)+\cdots+c_k\boldsymbol{\varphi}_k(x)=\mathbf{0} \quad (\alpha<x<\beta),$$

则称函数向量组 (3) [在区间 $\alpha<x<\beta$ 上] 为线性相关的. 否则, 就称函数向量组(3)为线性无关的.

我们要特别研究函数向量组(3)当 $k=n$ 时的某些线性相关与线性无关的特征. 令

$$\boldsymbol{\varphi}_1(x)=\begin{pmatrix}\varphi_{11}(x)\\ \varphi_{21}(x)\\ \vdots\\ \varphi_{n1}(x)\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}_2(x)=\begin{pmatrix}\varphi_{12}(x)\\ \varphi_{22}(x)\\ \vdots\\ \varphi_{n2}(x)\end{pmatrix}, \quad \cdots,$$

$$\boldsymbol{\varphi}_n(x)=\begin{pmatrix}\varphi_{1n}(x)\\ \varphi_{2n}(x)\\ \vdots\\ \varphi_{nn}(x)\end{pmatrix}. \tag{4}$$

设函数向量组 (4) 是线性相关的，则有 n 个不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，使得

$$c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)=0.$$

亦即

$$\begin{cases} c_1\varphi_{11}(x)+c_2\varphi_{12}(x)+\cdots+c_n\varphi_{1n}(x)=0, \\ c_1\varphi_{21}(x)+c_2\varphi_{22}(x)+\cdots+c_n\varphi_{2n}(x)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1\varphi_{n1}(x)+c_2\varphi_{n2}(x)+\cdots+c_n\varphi_{nn}(x)=0, \end{cases} \tag{5}$$

对一切 $x\in(\alpha, \beta)$ 成立. 对于任意固定的 $x\in(\alpha, \beta)$，方程组 (5) 可以看作是关于 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的齐次联立方程组. 如上所述，有不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，使 (5) 成立. 因此，根据线性联立方程组的一般理论推出，方程组 (5) 的系数行列式

$$W(x)\equiv\begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \cdots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \cdots & \varphi_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \cdots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix}=0, \tag{6}$$

$$(\alpha<x<\beta).$$

由 (6) 式定义的行列式 $W(x)$ 称为函数向量组 (4) 的**伏朗斯基行列式**. 根据上面的讨论可见：函数向量组 (4) 是线性相关的必要条件为它的伏朗斯基行列式 $W(x)\equiv 0$ (即，对一切 $x\in(\alpha, \beta)$，有 $W(x)=0$). 但不难举例说明，$W(x)\equiv 0$ 不是函数向量组 (4) 为线性相关的充分条件.

引理 1 设 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)\in\mathscr{S}$，则它们是线性相关的充分和必要条件为它们的伏朗斯基行列式 $W(x)\equiv 0$.

【证明】 必要性在前面已经证明. 下面证明充分性：

设 $W(x)\equiv 0$. 特别取定一点 $x_0\in(\alpha, \beta)$，有 $W(x_0)=0$. 再以 $W(x_0)$ 为系数行列式，作一联立方程组，即

$$\begin{cases} c_1\varphi_{11}(x_0)+c_2\varphi_{12}(x_0)+\cdots+c_n\varphi_{1n}(x_0)=0, \\ c_1\varphi_{21}(x_0)+c_2\varphi_{22}(x_0)+\cdots+c_n\varphi_{2n}(x_0)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1\varphi_{n1}(x_0)+c_2\varphi_{n2}(x_0)+\cdots+c_n\varphi_{nn}(x_0)=0, \end{cases} \tag{7}$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是未定的数组. 由于 (7) 的系数行列式 $W(x_0)=0$, 所以 (7) 有非零解, 即有不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$, 使(7)式成立. 现在, 我们就取定这样的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$, 并且令

$$u(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x),$$

则由定理 1 推出, $y=u(x)$是齐次线性微分方程组(2)的一个解,而且由(7)可见, $y=u(x)$满足初始条件

$$y(x_0)=0. \tag{8}$$

另一方面, 我们知道 $y(x)\equiv 0$ 是齐次线性微分方程组 (2) 的解, 而且它也自然满足初始条件(8). 因此, 由解的唯一性定理推出,这两个解必须相等, 即 $u(x)\equiv 0$. 也就是说,

$$c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)\equiv 0.$$

因为 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是不全为零的常数,所以 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$是线性相关的. ▌

在引理 1 的证明过程中, 实际上只用到 $W(x_0)=0$, 所以有下述结论.

引理 2 设 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 是齐次线性微分方程组(2)的 n 个解, 而且它们的伏朗斯基行列式 $W(x)$在某一点 $x_0\in(\alpha, \beta)$ 等于零, 即 $W(x_0)=0$, 则 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$是线性相关的.

由引理 1 和引理 2 推出, 齐次线性微分方程组 (2) 的任何 n 个解

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x) \quad (\alpha<x<\beta) \tag{9}$$

的伏朗斯基行列式 $W(x)$ 只有两种可能:

1) $W(x)\equiv 0$——(9)是线性相关的;

2) $W(x)\neq 0$——(9)是线性无关的.

因此,要判别解组(9)是否线性关无,只要验算它的伏朗斯基行列式在某一点是否不等于零. 这在应用上是很方便的.

设解组(9)是线性无关的,则称它是微分方程组(2)的一个基本解组.

定理2 齐次线性微分方程组(2)的基本解组总是存在的.

【证明】 我们可以取 n 个常数向量

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ \vdots \\ e_{n1} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \\ \vdots \\ e_{n2} \end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n=\begin{pmatrix} e_{1n} \\ e_{2n} \\ \vdots \\ e_{nn} \end{pmatrix},$$

使得它们组成的行列式

$$E=\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{nn} \end{vmatrix}\neq 0 \tag{10}$$

对于每个 $\boldsymbol{e}_i$,由解的存在定理,方程组(2)有唯一的一个解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\psi}_i(x)$,使得它满足初始条件

$$\boldsymbol{\psi}_i(x_0)=\boldsymbol{e}_i\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n). \tag{11}$$

这样,我们就得到方程组(2)的 n 个解

$$\boldsymbol{\psi}_1(x),\ \boldsymbol{\psi}_2(x),\ \cdots,\ \boldsymbol{\psi}_n(x). \tag{12}$$

而且由初始条件(11)可见,解组(12)的伏朗斯基行列式 $W(x)$ 满足 $W(x_0)=E\neq 0$. 因此,解组(12)是线性无关的,即它是

一个基本解组. ▌

定理3 设已知齐次线性微分方程组(2)的一个基本解组(12),则对于任意的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$,

$$\boldsymbol{y}=c_1\boldsymbol{\psi}_1(x)+c_2\boldsymbol{\psi}_2(x)+\cdots+c_n\boldsymbol{\psi}_n(x) \tag{13}$$

是方程组(2)的解,而且通解(13)包括方程组(2)的一切解.

【证明】 由定理1推出,(13)表示方程组(2)的解. 下面再来证明它表示方程组(2)的一切解.

设任意给定微分方程组(2)的一个解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{u}(x)$, 令

$$\boldsymbol{u}(x_0)=\bar{c}_1\boldsymbol{\psi}_1(x_0)+\bar{c}_2\boldsymbol{\psi}_2(x_0)+\cdots+\bar{c}_n\boldsymbol{\psi}_n(x_0), \tag{14}$$

即

$$\begin{cases}\bar{c}_1\psi_{11}(x_0)+\bar{c}_2\psi_{12}(x_0)+\cdots+\bar{c}_n\psi_{1n}(x_0)=u_1(x_0),\\ \bar{c}_1\psi_{21}(x_0)+\bar{c}_2\psi_{22}(x_0)+\cdots+\bar{c}_n\psi_{2n}(x_0)=u_2(x_0),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \bar{c}_1\psi_{n1}(x_0)+\bar{c}_2\psi_{n2}(x_0)+\cdots+\bar{c}_n\psi_{nn}(x_0)=u_n(x_0).\end{cases} \tag{15}$$

因为解组(12)是线性无关的,所以联立方程组(15)的系数行列式 $W(x_0)\neq0$. 因此,由(15)唯一地确定了一组常数 $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \cdots, \bar{c}_n$, 则 $\boldsymbol{y}=\bar{c}_1\boldsymbol{\psi}_1(x)+\bar{c}_2\boldsymbol{\psi}_2(x)+\cdots+\bar{c}_n\boldsymbol{\psi}_n(x)$ 是微分方程组(2)的一个解,由(15)或(14)可见,它与解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{u}(x)$ 满足相同的初始条件. 因此,由解的唯一性定理推出

$$\boldsymbol{u}(x)=\bar{c}_1\boldsymbol{\psi}_1(x)+\bar{c}_2\boldsymbol{\psi}_2(x)+\cdots+\bar{c}_n\boldsymbol{\psi}_n(x).$$

这就证明了通解(13)包括方程组(2)的一切解. ▌

定理3是本节的主要定理,它表明线性空间 $\mathscr{S}$ 的维数为 n. 只要找到齐次线性微分方程组的 n 个线性无关的解,就可以得到它的通解.

最后,我们介绍在微分方程理论研究中很有用的一个公式.

刘维尔公式 设齐次线性微分方程组(2)的一个解组是

(9)，则它的伏朗斯基行列式为

$$W(x)=W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(x)dx}. \tag{16}$$

【证明】 由伏朗斯基行列式 $W(x)$ 的定义(6)，我们对 x 求导数，就有

$$W'(x)=\begin{vmatrix}\varphi'_{11} & \varphi'_{12} & \cdots & \varphi'_{1n}\\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n}\\ \varphi'_{21} & \varphi'_{22} & \cdots & \varphi'_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn}\end{vmatrix}$$

$$+\cdots+\begin{vmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n}\\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi'_{n1} & \varphi'_{n2} & \cdots & \varphi'_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{n}a_{1i}\varphi_{i1} & \sum_{i=1}^{n}a_{1i}\varphi_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n}a_{1i}\varphi_{in}\\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn}\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n}\\ \sum_{i=1}^{n}a_{2i}\varphi_{i1} & \sum_{i=1}^{n}a_{2i}\varphi_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n}a_{2i}\varphi_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn}\end{vmatrix}$$

$$+\cdots+\begin{vmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n}\\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sum_{i=1}^{n}a_{ni}\varphi_{i1} & \sum_{i=1}^{n}a_{ni}\varphi_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n}a_{ni}\varphi_{in}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}(x)W(x)+a_{22}(x)W(x)+\cdots+a_{nn}(x)W(x),$$

由此得到关于 $W(x)$ 的一个一阶线性微分方程式

$$W'(x)-\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(x)\right)W(x)=0. \qquad (17)$$

用积分因子

$$\mu=e^{-\int_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(x)dx}$$

乘(17)式的两端，得

$$\frac{d}{dx}\left[W(x)e^{-\int_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(x)dx}\right]=0.$$

从而推出刘维尔公式(16)成立. ∎

从刘维尔公式，也可以直接推出齐次线性微分方程组的解组的伏朗斯基行列式 $W(x)$ 只有两种可能，即 $W(x)$ 或者恒等于零(当 $W(x_0)=0$)，或者恒不等于零(当 $W(x_0)\neq 0$).

从刘维尔公式还可以推出下面的结论：若

$$\int_{x_0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(x)dx=+\infty,$$

则齐次线性微分方程组 (2) 至少有一个解在区间 $[x_0, \infty)$ 上是无界的.

习 题 8·3

1. 证明齐次线性微分方程组 (2) 的任何 $n+1$ 个解都是线性相关的.
2. 设 $W_1(x)$ 和 $W_2(x)$ 分别是齐次线性微分方程组(2)的两个基本解组的伏朗斯基行列式，试证 $W_1(x)=C\cdot W_2(x)$，其中 C 是一个不等于零的常数.
3. 证明两个不同的齐次线性微分方程组不可能有一个相同的基本解组. [提示：齐次线性微分方程组(2)的系数函数 $a_{k1}, a_{k2}, \cdots, a_{kn}$ 可由它的一个基本解组唯一地表出($k=1, 2, \cdots, n$).]
4. 设齐次线性微分方程组 (2) 的系数函数矩阵 $A(x)$ 是一个三角矩阵(即对角线以上(或以下)的元素全是零)，则可用初等积分法求出(2)的通解.

第四节　常系数齐次线性微分方程组

从上一节的理论我们知道，求齐次线性微分方程组的通解问题归结到求它的 n 个线性无关的解．这与非线性微分方程组的通解结构相比较，不能不说是简单多了．但是，求齐次线性微分方程组的通解，一般而言，办法也是很少的．在这一节，我们介绍常系数齐次线性微分方程组的代数求解法．

设齐次线性微分方程组

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx}=A\boldsymbol{y}, \tag{1}$$

其中 A 是实的常系数矩阵；令

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

我们称齐次线性微分方程组 (1) 为常系数的．下面就讨论它的求解问题．

假设

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{r}e^{\lambda x} \tag{2}$$

为方程组(1)的一个解，其中 λ 是待定的常数，而 $\boldsymbol{r}$ 是待定的常数向量；令

$$\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}.$$

把(2)代入(1)，推出

$$(A-\lambda I)\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}, \tag{3}$$

其中 I 是一个 n 阶的单位矩阵．为了帮助读者更易了解，我

们把(3)写成用它的分量表示的形式:

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)r_1 & +a_{12}r_2+\cdots+a_{1n}r_n=0,\\ a_{21}r_1+(a_{22}-\lambda)r_2+\cdots+a_{2n}r_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}r_1 & +a_{n2}r_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)r_n=0.\end{cases} \tag{4}$$

联立方程组 (4) 有非零解 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 的充要条件为它的系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{5}$$

我们称 (5) 为常系数齐次线性方程组 (2) 的**特征方程**. 注意,特征方程(5)的左边行列式是 λ 的一个 n 次多项式. 设 λ_j 是特征方程 (5) 的一个根, 则称 λ_j 是方程组 (2) 的一个**特征根**. 因此, 方程组(2)最多有 n 个特征根. 分两种情况讨论之.

第一种情况: 设 n 个特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 互不相等.

此时, 对于每个特征根 $\lambda=\lambda_j$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 都是单重根, 因此对应于齐次联立方程组(4)只有一个线性无关的非零解 $r_{1j}, r_{2j}, \cdots, r_{nj}$. 我们用 $\boldsymbol{r}_j$ 表示它的列向量, 则 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{r}_j e^{\lambda_j x}$ 就是微分方程组 (1) 的一个非零解. 这样, 就得到方程 (2) 的 n 个解:

$$\boldsymbol{r}_1 e^{\lambda_1 x},\ \boldsymbol{r}_2 e^{\lambda_2 x},\ \cdots,\ \boldsymbol{r}_n e^{\lambda_n x}. \tag{6}$$

设 $W(x)$ 是解组 (6) 的伏朗斯基行列式, 则

$$W(0)=\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{vmatrix}.$$

因为特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 互不相等，所以特征向量 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n$ 是线性无关的，从而它们组成的行列式 $W(0)\neq 0$. 由此可见，解组(6)是一个基本解组. 因此，我们得到方程组(1)的通解

$$\boldsymbol{y}=c_1\boldsymbol{r}_1e^{\lambda_1x}+c_2\boldsymbol{r}_2e^{\lambda_2x}+\cdots+c_n\boldsymbol{r}_ne^{\lambda_nx}, \tag{7}$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是 n 个任意常数.

在此必须指出，当某个特征根是复的时候，通解(7)就是复值的. 为了得到实值解，我们作如下讨论.

由于矩阵 A 是实系数的，所以它如果有复的特征根，那么这些特征根一定是共轭地出现的. 为了讨论方便，设 λ_1 与 λ_2 是一对共轭复根，令

$$\lambda_1=\alpha+i\beta,\quad \lambda_2=\alpha-i\beta\quad (\beta\neq 0),$$

这里 α 与 β 是实数. 由(4)可见，与 λ_1、λ_2 相应的特征向量 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$ 也可以使它们是共轭的. 所以可以把 $\boldsymbol{r}_1e^{\lambda_1x}$ 与 $\boldsymbol{r}_2e^{\lambda_2x}$ 写成如下的共轭形式

$$\boldsymbol{r}_1e^{\lambda_1x}=\boldsymbol{u}(x)+i\boldsymbol{v}(x),\qquad \boldsymbol{r}_2e^{\lambda_2x}=\boldsymbol{u}(x)-i\boldsymbol{v}(x).$$

根据线性迭加原理，我们知道

$$\boldsymbol{u}(x)=\frac{\boldsymbol{r}_1e^{\lambda_1x}+\boldsymbol{r}_2e^{\lambda_2x}}{2},\quad \boldsymbol{v}(x)=\frac{\boldsymbol{r}_1e^{\lambda_1x}-\boldsymbol{r}_2e^{\lambda_2x}}{2i}$$

是方程组(1)的两个解，而且它们是实值的.

因此，对于每对共轭的特征根，总可以得到两个线性无关的实值解. 最后，就这样得到 n 个实值解，不难看出，它们是线性无关的. 从而可以写出所求的实的通解.

【例题 1】 求解

$$\frac{dx}{dt}=x+2y,\quad \frac{dy}{dt}=4x+3y. \tag{8}$$

我们把(8)写成向量的形式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{9}$$

令
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}e^{\lambda t},$$

代入方程(9)，即得

$$\begin{cases}(1-\lambda)r_1+ \qquad 2r_2=0, \\ \qquad 4r_1+(3-\lambda)r_2=0,\end{cases} \tag{10}$$

并得特征方程式

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda-5=0,$$

它的两个特征根为 $\lambda_1=5$, $\lambda_2=-1$.

对应于 $\lambda=\lambda_1=5$, 由联立方程(10)推出

$$r_1:r_2=1:2.$$

令 $r_1=1$, 则 $r_2=2$. 因此得到一个特解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{5t};$$

对应于 $\lambda=\lambda_2=-1$, 由联立方程(10)推出

$$r_1:r_2=-1:1.$$

令 $r_1=1$, 则 $r_2=-1$. 因此又得到一个特解

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t}.$$

从而我们得到所求的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{5t}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t},$$

亦即

$$x=c_1e^{5t}+c_2e^{-t}, \quad y=2c_1e^{5t}-c_2e^{-t}.$$

【例题 2】 求解

$$\frac{dx}{dt}=x-5y,\quad \frac{dy}{dt}=2x-y. \tag{11}$$

令
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}e^{\lambda t},$$

代入方程(11)，得

$$\begin{cases}(1-\lambda)r_1 \qquad -5r_2=0,\\ \qquad 2r_1+(-1-\lambda)r_2=0,\end{cases} \tag{12}$$

由此得特征多项式$\lambda^2+9=0$. 从而得特征根为$\lambda_1=3i$, $\lambda_2=-3i$.

对应于$\lambda=\lambda_1=3i$，由联立方程组(12)推出

$$r_1:r_2=5:(1-3i).$$

令$r_1=5$，则$r_2=(1-3i)$. 于是得到一个复值解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 1-3i \end{pmatrix}e^{i3t}$$

$$=\begin{pmatrix} 5\cos 3t \\ \cos 3t+3\sin 3t \end{pmatrix}+i\begin{pmatrix} 5\sin 3t \\ \sin 3t-3\cos 3t \end{pmatrix};$$

对应于$\lambda=\lambda_2=-3i$，又得到一个共轭的解

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\cos 3t \\ \cos 3t+3\sin 3t \end{pmatrix}-i\begin{pmatrix} 5\sin 3t \\ \sin 3t-3\cos 3t \end{pmatrix}.$$

由此，我们得到通解

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 5\cos 3t \\ \cos 3t+3\sin 3t \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 5\sin 3t \\ \sin 3t-3\cos 3t \end{pmatrix},$$

亦即

$$\begin{cases} x=5c_1\cos 3t+5c_2\sin 3t,\\ y=c_1(\cos 3t+3\sin 3t)+c_2(\sin 3t-3\cos 3t).\end{cases}$$

第二种情况：有相重的特征根.

设这些特征根为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$，它们的重数分别为正整数 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_s$，这里 $1\leqslant s<n$，$\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_s=n$.

此时可以证明(有兴趣的读者可参考本节末的附注)，对应于每个 λ_j，可以求得 σ_j 个线性无关的解，它们的一般形式为

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_{1j}(x) \\ P_{2j}(x) \\ \vdots \\ P_{nj}(x) \end{pmatrix}e^{\lambda_j x}, \tag{13}$$

其中 $P_{1j}(x), P_{2j}(x), \cdots, P_{nj}(x)$是 x 的次数不超过 σ_j-1 的多项式($j=1, 2, \cdots, s$). 最后，我们得到 n 个线性无关的解. 对于特征根是复的情形，可按与第一种情况相同的方法讨论，这里对某些细节的讨论就从略了. 读者须要知道的是，对应于每个 λ_j，令(13)为与它相应的解，其中 $P_{1j}(x), P_{2j}(x), \cdots, P_{nj}(x)$ 是待定的 σ_j-1 次多项式. 然后，把 (13) 代入微分方程组 (1)，再来确定多项式的系数. 因为有 σ_j 个这种线性无关的解，所以在多项式 $P_{1j}(x), P_{2j}(x), \cdots, P_{nj}(x)$ 的所有系数中应该有 σ_j 个独立的任意常数. 如果读者对上面一段话不甚理解时，可先验算下面的例子，这会有所帮助的.

【例题 3】 求解

$$\frac{dy_1}{dx}=y_1-y_2, \quad \frac{dy_2}{dx}=y_1+3y_2. \tag{14}$$

易知微分方程组(14)的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2=0.$$

它有二重特征根 $\lambda_1=2$. 从而令

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1x+b_1 \\ a_2x+b_2 \end{pmatrix}e^{2x}, \tag{15}$$

其中 a_1, b_1, a_2, b_2 是待定的常数. 把(15)代入(14), 即得

$$\begin{cases} a_1+2(a_1x+b_1)=(a_1x+b_1)-(a_2x+b_2), \\ a_2+2(a_2x+b_2)=(a_1x+b_1)+3(a_2x+b_2). \end{cases}$$

移项化简后, 得

$$\begin{cases} (a_1+a_2)x=-a_1-b_1-b_2, \\ (a_1+a_2)x=\quad a_2-b_1-b_2. \end{cases}$$

比较这两个多项式的系数, 即得

$$\begin{cases} a_1+a_2 \qquad\qquad =0, \\ a_1 \qquad +b_1+b_2=0, \\ \quad -a_2+b_1+b_2=0. \end{cases}$$

这个联立方程组的第三式实际上可以从第一式和第二式推得. 而从第二式和第三式, 只能确定到

$$a_1=-b_1-b_2, \quad a_2=b_1+b_2,$$

其中 b_1 和 b_2 是两个任意常数. 所以由(15)得

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-b_1-b_2)x+b_1 \\ (b_1+b_2)x+b_2 \end{pmatrix}e^{2x}=\begin{pmatrix} b_1(1-x)-b_2x \\ b_1x+b_2(1+x) \end{pmatrix}e^{2x}$$

$$=b_1\begin{pmatrix} 1-x \\ x \end{pmatrix}e^{2x}+b_2\begin{pmatrix} -x \\ 1+x \end{pmatrix}e^{2x}.$$

由此可见, 我们所求的通解为

$$y_1=b_1(1-x)e^{2x}-b_2xe^{2x}, \quad y_2=b_1xe^{2x}+b_2(1+x)e^{2x}.$$

【例题 4】 求解

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+x-y \qquad =0, \\ \dfrac{dy}{dt} \qquad +y-4z=0, \\ \dfrac{dz}{dt}-x \qquad +4z=0. \end{cases} \tag{16}$$

令
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} e^{\lambda t},$$

代入方程组(16)，得

$$\begin{cases} (1+\lambda)r_1 - r_2 = 0, \\ (1+\lambda)r_2 - 4r_3 = 0, \\ -r_1 + (4+\lambda)r_3 = 0. \end{cases} \tag{17}$$

从而得特征方程

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1+\lambda & -4 \\ -1 & 0 & 4+\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+3)^2 = 0.$$

于是得到特征根 $\lambda_1=0$ 是一重的; $\lambda_2=-3$ 是二重的.

对于 $\lambda=\lambda_1=0$, 由(17)得到

$$r_1 - r_2 = 0, \quad r_2 - 4r_3 = 0.$$

从而推出 $r_1:r_2:r_3=4:4:1$. 令 $r_3=1$, 则 $r_1=4$, $r_2=4$. 所以，对应于 $\lambda_1=0$, 我们得到一个特解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

对于 $\lambda=\lambda_2=-3$, 由(17)得到

$$-2r_1 - r_2 = 0, \quad -2r_2 - 4r_3 = 0.$$

从而推出 $r_1:r_2:r_3=1:-2:1$. 取 $r_1=1$, 则 $r_2=-2$, $r_3=1$. 因此，对应于 $\lambda=\lambda_2=-3$, 我们得到一个特解

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}. \tag{19}$$

至此，尚缺一个解．对应二重根 $\lambda_2=-3$，还有如下形式的解

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+b_1t \\ a_2+b_2t \\ a_3+b_3t \end{pmatrix}e^{-3t},$$

代入微分方程组(16)，得

$$\begin{cases} b_1-3(a_1+b_1t)+(a_1+b_1t)-(a_2+b_2t)=0, \\ b_2-3(a_2+b_2t)+(a_2+b_2t)-4(a_3+b_3t)=0, \\ b_3-3(a_3+b_3t)-(a_1+b_1t)+4(a_3+b_3t)=0. \end{cases}$$

化简后，我们有

$$\begin{cases} (-2b_1-b_2)t+b_1-2a_1-a_2=0, \\ (-2b_2-4b_3)t+b_2-2a_2-4a_3=0, \\ (-b_1+b_3)t+b_3-a_1+a_3=0. \end{cases}$$

比较以上三个多项式的系数，分别得到

$$\begin{cases} b_1-2a_1-a_2=0, & -2b_1-b_2=0, \\ b_2-2a_2-4a_3=0, & -2b_2-4b_3=0, \\ b_3-a_1+a_3=0, & -b_1+b_3=0. \end{cases} \tag{20}$$

令 $b_1=1$，$a_1=0$，则由(20)推出

$$b_2=-2,\ b_3=1,\ a_2=1,\ a_3=-1.$$

因此，我们得到另一个特解

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t \\ 1-2t \\ -1+t \end{pmatrix}e^{-3t}. \tag{21}$$

易知(18)、(19)和(21)的伏朗斯基行列式在 $t=0$ 的值 $\neq0$，所以它们组成一个基本解组．因此，齐次线性微分方程组(16)的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_3 \begin{pmatrix} t \\ 1-2t \\ -1+t \end{pmatrix} e^{-3t}.$$

最后，我们须要指出，即使当特征根 λ_j 是重根时，在(13)式中的多项式 $P_{1j}(x)$, $P_{2j}(x)$, $\cdots$, $P_{nj}(x)$的最高次数还可能是零，即它们都是常数，例如本节习题 8·4 第 1 题(9)就是这样．至于为什么会发生这种情形，下面的附注作出了回答．

附注 我们要从理论上来分析常系数齐次线性微分方程组(1)的通解的基本形式．为此，作变换

$$y = Pu, \tag{22}$$

其中 P 是非退化的 n 阶常系数方阵，u 是新的未知函数向量．令

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

把(22)式代入微分方程组(1)，得

$$\frac{du}{dx} = P^{-1}APu. \tag{23}$$

根据线性代数的理论，我们可以选取 P，使得 $P^{-1}AP$ 为约当标准形，即

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix},$$

其中标准块

$$A_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \lambda_j & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_j \end{pmatrix}_{n_j \times n_j},$$

$n_j \geqslant 1(j=1, 2, \cdots, m)$, $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$. 如此，微分方程组(23)可以分解成 m 个独立的小组：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du_1}{dx} &= \lambda_1 u_1 + u_2 \\
\frac{du_2}{dx} &= \qquad \lambda_1 u_2 + u_3 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{du_{n_1-1}}{dx} &= \qquad\qquad \lambda_1 u_{n_1-1} + u_{n_1} \\
\frac{du_{n_1}}{dx} &= \qquad\qquad\qquad \lambda_1 u_{n_1}
\end{aligned}\right\}, \tag{23$_1$}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du_{n_1+1}}{dx} &= \lambda_2 u_{n_1+1} + u_{n_1+2} \\
\frac{du_{n_1+2}}{dx} &= \qquad \lambda_2 u_{n_1+2} + u_{n_1+3} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{du_{n_1+n_2}}{dx} &= \qquad\qquad\qquad \lambda_2 u_{n_1+n_2}
\end{aligned}\right\}, \tag{23$_2$}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du_{n-n_m+1}}{dx} &= \lambda_m u_{n-n_m+1} + u_{n-n_m+2} \\
\frac{du_{n-n_m+2}}{dx} &= \qquad \lambda_m u_{n-n_m+2} + u_{n-n_m+3} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{du_n}{dx} &= \qquad\qquad\qquad \lambda_m u_n
\end{aligned}\right\}, \tag{23$_m$}$$

显然，对于每一个小组，从最后一式往上倒退，可以依次用初等积分法求得解. 例如，对于(23)$_1$，求得

$$\begin{cases}
u_1 = \left[c_1 \dfrac{x^{n_1-1}}{(n_1-1)!} + c_2 \dfrac{x^{n_1-2}}{(n_1-2)!} + \cdots + c_{n_1-1}x + c_{n_1}\right] e^{\lambda_1 x} \\
u_2 = \left[c_1 \dfrac{x^{n_1-2}}{(n_1-2)!} + c_2 \dfrac{x^{n_1-3}}{(n_1-3)!} + \cdots + c_{n_1-1}\right] e^{\lambda_1 x} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u_{n_1-1} = [c_1 x + c_2] e^{\lambda_1 x} \\
u_{n_1} = c_1 e^{\lambda_1 x},
\end{cases}$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_{n_1}$ 是 n_1 个任意常数. 因此，对应于约当标准块 A_1，方程组(23)有如下形式的解:

$$u_1=q_1(x)e^{\lambda_1 x},\ u_2=q_2(x)e^{\lambda_1 x},\ \cdots,\ u_{n_1}=q_{n_1}(x)e^{\lambda_1 x},$$
$$u_{n_1+1}=0,\ \cdots,\ u_n=0,$$
其中多项式 $q_1(x)$, $q_2(x)$, $\cdots$, $q_{n_1}(x)$ 的最高次数不高于 n_1-1. 再通过变换(22),我们得到微分方程组(1)的如下形式的解
$$y_1=p_1(x)e^{\lambda_1 x},\ y_2=p_2(x)e^{\lambda_1 x},\ \cdots,\ y_n=p_n(x)e^{\lambda_1 x}.$$
这里 $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\cdots$, $p_n(x)$ 是多项式 $q_1(x)$, $q_2(x)$, $\cdots$, $q_{n_1}(x)$ 的一些线性组合,所以它们也是一些次数不高于 n_1-1 的多项式.

类似地可以讨论$(23)_j$($j=2$, $\cdots$, m). 由此可得下述定理:

定理 设矩阵 A 对应于特征根 λ_j 有一约当标准块为 A_j, 其阶数为 n_j($j=1, 2, \cdots, m$; $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$). 则对应于 A_j, 方程组 (1) 有下列形式的解:
$$y_1=p_{1j}(x)e^{\lambda_j x},\ y_2=p_{2j}(x)e^{\lambda_j x},\ \cdots,\ y_n=p_{nj}(x)e^{\lambda_j x},\tag{24}$$
其中多项式 $p_{1j}(x)$, $p_{2j}(x)$, $\cdots$, $p_{nj}(x)$ 的次数都不高于 n_j-1, 而且它们共含 n_j 个任意常数. 这样,方程组(1)的通解为
$$y_1=\sum_{j=1}^{m}p_{1j}(x)e^{\lambda_j x},\ y_2=\sum_{j=1}^{m}p_{2j}(x)e^{\lambda_j x},\ \cdots,\ y_n=\sum_{j=1}^{m}p_{nj}(x)e^{\lambda_j x}.$$

注意 1 这里 λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_m 不一定互不相等, 因此 n_j 可能小于特征根 λ_j 的重数.

注意 2 以上只是一种理论上的分析,这是因为在实践上要找变换矩阵 P 不是一件容易的事. 因此, 刚才得到的定理只能作为前面那种代入求解法的理论基础. 在用代入法求解时, 我们一般只知道特征根 λ_j 的重数 σ_j,因此要假设解(24)中的多项式次数不高于 σ_j-1. 然后再把(24)代入方程组(1),再来确定它们的系数(除了 σ_j 个任意常数外).

习 题 8·4

1. 求下列各微分方程组的通解:

(1) $y_1'=3y_1-2y_2$, $y_2'=2y_1-2y_2$;

(2) $y_1'=2y_1-y_2$, $y_2'=3y_1-2y_2$;

(3) $y_1'=y_1-5y_2$, $y_2'=y_1-3y_2$;

(4) $y_1'=3y_1-2y_2$, $y_2'=4y_1-y_2$;

(5) $y_1'=3y_1-4y_2$, $y_2'=y_1-y_2$;

(6) $y_1'=y_1+y_2+y_3,\ y_2'=2y_1+y_2-y_3,\ y_3'=-8y_1-5y_2-3y_3$;

(7) $y_1'=y_1-y_2+4y_3,\ y_2'=3y_1+2y_2-y_3,\ y_3'=2y_1+y_2-y_3$;

(8) $y_1'=y_1+y_2+y_3,\ y_2'=2y_1+y_2-y_3,\ y_3'=-y_2+y_3$;

(9) $y_1'=y_2+y_3,\ y_2'=y_1+y_3,\ y_3'=y_1+y_2$.

2. 求解下列微分方程组:

(1) $xy_1'=4y_1-3y_2,\ xy_2'=8y_1-6y_2$;

(2) $xy_1'=-y_1-y_2,\ xy_2'=2y_1-y_2$.

3*. 证明常系数齐次线性微分方程组(1)的任何解，当 $x\to+\infty$ 时，都趋于零的充要条件是：它的系数矩阵 A 的所有特征根的实部都是负的.

第五节 非齐次线性微分方程组

现在，我们考虑非齐次线性微分方程组

$$y_i'=a_{i1}(x)y_1+a_{i2}(x)y_2+\cdots+a_{in}(x)y_n+f_i(x) \qquad (1)$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

或者它的向量形式

$$\boldsymbol{y}'=A(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x). \qquad (2)$$

设系数函数矩阵 $A(x)$ 和强迫函数向量 $\boldsymbol{f}(x)$ 在区间 $\alpha<x<\beta$ 上连续.

我们首先讨论非齐次微分方程组 (2) 和与它对应的齐次微分方程组

$$\boldsymbol{y}'=A(x)\boldsymbol{y} \qquad (3)$$

之间的关系.

定理 设已知齐次线性微分方程组(3)的一个基本解组为

$$\boldsymbol{\varphi}_1(x),\ \boldsymbol{\varphi}_2(x),\ \cdots,\ \boldsymbol{\varphi}_n(x) \qquad (4)$$

以及非齐次线性微分方程组 (2) 的一个特解为 $\boldsymbol{\psi}(x)$，则微分方程组(2)的通解

$$\boldsymbol{y}=c_1\boldsymbol{\varphi}_1(x)+c_2\boldsymbol{\varphi}_2(x)+\cdots+c_n\boldsymbol{\varphi}_n(x)+\boldsymbol{\psi}(x) \tag{5}$$

包括(2)的一切解.

【证明】 我们首先证明公式(5)表示非齐次线性微分方程组(2)的解. 事实上,由(5)得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}'&=c_1\boldsymbol{\varphi}_1'(x)+c_2\boldsymbol{\varphi}_2'(x)+\cdots+c_n\boldsymbol{\varphi}_n'(x)+\boldsymbol{\psi}'(x)\\&=A(x)[c_1\boldsymbol{\varphi}_1(x)+c_2\boldsymbol{\varphi}_2(x)+\cdots+c_n\boldsymbol{\varphi}_n(x)]\\&\quad+A(x)\boldsymbol{\psi}(x)+\boldsymbol{f}(x)\\&=A(x)[c_1\boldsymbol{\varphi}_1(x)+c_2\boldsymbol{\varphi}_2(x)+\cdots+c_n\boldsymbol{\varphi}_n(x)+\boldsymbol{\psi}(x)]+\boldsymbol{f}(x)\\&=A(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x),\end{aligned}$$

即由(5)式表达的 $\boldsymbol{y}$ 是方程组(2)的解.

其次,设 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{u}(x)$ 为方程组(2)的任何一个解,则有

$$\boldsymbol{u}'(x)=A(x)\boldsymbol{u}(x)+\boldsymbol{f}(x);$$

另外,

$$\boldsymbol{\psi}'(x)=A(x)\boldsymbol{\psi}(x)+\boldsymbol{f}(x).$$

两式相减后,就得

$$(\boldsymbol{u}(x)-\boldsymbol{\psi}(x))'=A(x)(\boldsymbol{u}(x)-\boldsymbol{\psi}(x)).$$

这就是说,$(\boldsymbol{u}(x)-\boldsymbol{\psi}(x))$ 是齐次线性微分方程组(3)的一个解. 因此,根据第三节的一般理论,推出

$$\boldsymbol{u}(x)-\boldsymbol{\psi}(x)=\bar{c}_1\boldsymbol{\varphi}_1(x)+\bar{c}_2\boldsymbol{\varphi}_2(x)+\cdots+\bar{c}_n\boldsymbol{\varphi}_n(x),$$

其中 $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \cdots, \bar{c}_n$ 是 n 个常数. 从而

$$\boldsymbol{u}(x)=\bar{c}_1\boldsymbol{\varphi}_1(x)+\bar{c}_2\boldsymbol{\varphi}_2(x)+\cdots+\bar{c}_n\boldsymbol{\varphi}_n(x)+\boldsymbol{\psi}(x).$$

这就证明了公式(5)表达了方程组(2)的一切解. ▌

由这定理可知,假设已知齐次线性微分方程组(3)的一个基本解组(4),那么非齐次线性微分方程组(2)的求解问题就归结到求它的一个特解. 至于如何求这个特解,下面介绍拉格朗日的**常数变易法**:

因为 $\boldsymbol{y}=c_1\boldsymbol{\varphi}_1(x)+c_2\boldsymbol{\varphi}_2(x)+\cdots+c_n\boldsymbol{\varphi}_n(x)$

是齐次方程组(3)的解,所以它不可能是非齐次方程组(2)的

解. 现在，我们仿照在第四章中对二阶线性微分方程式所讲的常数变易法，令非齐次方程组(2)的一个特解为

$$\boldsymbol{y}=c_1(x)\boldsymbol{\varphi}_1(x)+c_2(x)\boldsymbol{\varphi}_2(x)+\cdots+c_n(x)\boldsymbol{\varphi}_n(x), \quad (6)$$

其中 $c_1(x)$, $c_2(x)$, $\cdots$, $c_n(x)$为 n 个待定的函数. 把(6)式代入方程组(2)，得

$$\begin{aligned}
&c_1(x)\boldsymbol{\varphi}_1'(x)+c_2(x)\boldsymbol{\varphi}_2'(x)+\cdots+c_n(x)\boldsymbol{\varphi}_n'(x)\\
&\quad+c_1'(x)\boldsymbol{\varphi}_1(x)+c_2'(x)\boldsymbol{\varphi}_2(x)+\cdots+c_n'(x)\boldsymbol{\varphi}_n(x)\\
&=A(x)(c_1(x)\boldsymbol{\varphi}_1(x)+c_2(x)\boldsymbol{\varphi}_2(x)+\cdots\\
&\quad+c_n(x)\boldsymbol{\varphi}_n(x))+\boldsymbol{f}(x)\\
&=c_1(x)A(x)\boldsymbol{\varphi}_1(x)+c_2(x)A(x)\boldsymbol{\varphi}_2(x)+\cdots\\
&\quad+c_n(x)A(x)\boldsymbol{\varphi}_n(x)+\boldsymbol{f}(x)\\
&=c_1(x)\boldsymbol{\varphi}_1'(x)+c_2(x)\boldsymbol{\varphi}_2'(x)+\cdots+c_n(x)\boldsymbol{\varphi}_n'(x)+\boldsymbol{f}(x).
\end{aligned}$$

从而推出

$$c_1'(x)\boldsymbol{\varphi}_1(x)+c_2'(x)\boldsymbol{\varphi}_2(x)+\cdots+c_n'(x)\boldsymbol{\varphi}_n(x)=\boldsymbol{f}(x),$$

亦即

$$\begin{cases}
c_1'(x)\varphi_{11}(x)+c_2'(x)\varphi_{12}(x)+\cdots+c_n'(x)\varphi_{1n}(x)=f_1(x),\\
c_1'(x)\varphi_{21}(x)+c_2'(x)\varphi_{22}(x)+\cdots+c_n'(x)\varphi_{2n}(x)=f_2(x),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
c_1'(x)\varphi_{n1}(x)+c_2'(x)\varphi_{n2}(x)+\cdots+c_n'(x)\varphi_{nn}(x)=f_n(x).
\end{cases} \quad (7)$$

这是一个关于 $c_1'(x)$, $c_2'(x)$, $\cdots$, $c_n'(x)$的联立一次方程组，而且它的系数行列式就是基本解组(4)的伏朗斯基行列式 $W(x)\neq 0$. 因此可由(7)唯一地解出

$$c_1'(x)=H_1(x),\ c_2'(x)=H_2(x),\ \cdots,\ c_n'(x)=H_n(x).$$

为了确定起见，可以取

$$c_1(x)=\int_{x_0}^{x} H_1(x)dx,\ c_2(x)=\int_{x_0}^{x} H_2(x)dx,\ \cdots,$$

$$c_n(x)=\int_{x_0}^{x} H_n(x)dx.$$

从而由(6)式,得到方程组(2)的一个特解

$$\boldsymbol{y}=\left(\int_{x_0}^{x} H_1(x)dx\right)\boldsymbol{\varphi}_1(x)$$

$$+\left(\int_{x_0}^{x} H_2(x)dx\right)\boldsymbol{\varphi}_2(x)+\cdots+\left(\int_{x_0}^{x} H_n(x)dx\right)\boldsymbol{\varphi}_n(x).$$

【例题 1】 求微分方程组

$$y_1'=2y_1-5y_2+\csc x,\quad y_2'=y_1-2y_2+\sec x \tag{8}$$

的一个特解.

我们容易求出与方程组 (8) 对应的齐次方程组的一个基本解组为

$$\begin{pmatrix} 5\cos x \\ 2\cos x+\sin x \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 5\sin x \\ -\cos x+2\sin x \end{pmatrix}.$$

利用常数变易法,令

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=c_1(x)\begin{pmatrix} 5\cos x \\ 2\cos x+\sin x \end{pmatrix}+c_2(x)\begin{pmatrix} 5\sin x \\ -\cos x+2\sin x \end{pmatrix},$$

代入方程组(8),就有

$$\begin{cases} 5c_1'(x)\cos x + 5c_2'(x)\sin x = \csc x, \\ c_1'(x)(2\cos x+\sin x)+c_2'(x)(-\cos x+2\sin x)=\sec x. \end{cases}$$

由此可以解出

$$\begin{cases} c_1'(x)=\dfrac{1}{5}(\operatorname{ctg} x+5\operatorname{tg} x-2), \\ c_2'(x)=\dfrac{1}{5}(2\operatorname{ctg} x-4). \end{cases}$$

取不定积分(省略积分常数),即得

$$\begin{cases} c_1(x)=\frac{1}{5}(\log|\sin x|-5\log|\cos x|-2x), \\ c_2(x)=\frac{1}{5}(2\log|\sin x|-4x). \end{cases}$$

因此，我们得到方程组(8)的一个特解

$$\begin{cases} y_1=(\log|\sin x|-5\log|\cos x|-2x)\cos x \\ \qquad +(2\log|\sin x|-4x)\sin x, \\ y_2=\frac{1}{5}(\log|\sin x|-5\log|\cos x|-2x)(2\cos x+\sin x) \\ \qquad +\frac{1}{5}(2\log|\sin x|-4x)(-\cos x+2\sin x). \end{cases}$$

请读者写出方程组(8)的通解.

与第四章的非齐次二阶线性微分方程式的情况相类似，对于某些非齐次的线性微分方程组，用代入法求特解，可能比用常数变易法更简捷.

【例题 2】 求方程组

$$\frac{dx}{dt}=-y-p\sin\omega t, \quad \frac{dy}{dt}=x+p\cos\omega t \tag{9}$$

的一个特解(这里 p 和 ω 都是正的常数，而且 $\omega\neq 1$).

现在，我们用代入法求解. 令

$$x=\alpha\sin\omega t+\beta\cos\omega t, \quad y=\gamma\sin\omega t+\delta\cos\omega t,$$

其中 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 是待定常数. 代入方程(9)，得

$$\begin{cases} (\alpha\omega+\delta)\cos\omega t+(-\beta\omega+\gamma+p)\sin\omega t=0, \\ (\gamma\omega-\beta-p)\cos\omega t+(-\delta\omega-\alpha)\sin\omega t=0. \end{cases}$$

由此推出

$$\begin{cases} \alpha\omega+\delta=0 \\ \delta\omega+\alpha=0; \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma\omega-\beta=p \\ -\beta\omega+\gamma=-p. \end{cases}$$

因为 $\omega\neq 1$，所以由第一组推出 $\alpha=0$, $\delta=0$; 再由第二组解出

$$\beta=\frac{p}{\omega-1},\ \gamma=\frac{p}{\omega-1}.$$

这样,就得到方程组(9)的一个特解

$$x=\frac{p}{\omega-1}\cos\omega t,\ y=\frac{p}{\omega-1}\sin\omega t.$$

注意,当 $\omega=1$ 时,就发生共振. 此时,应该令

$$x=t(\alpha\sin t+\beta\cos t),\ y=t(\gamma\sin t+\delta\cos t),$$

代入方程组(9),就可确定 $\alpha=-p,\ \beta=0,\ \gamma=0,\ \delta=p$. 从而得到所求的一个特解为

$$x=-p\cdot t\sin t,\ y=p\cdot t\cos t.$$

最后,我们顺便指出,对于某些常系数线性微分方程组,也可以用拉氏变换求解.

习 题 8·5

1. 用常数变易法求解:

(1) $y_1'=2y_1-y_2+e^x,\ y_2'=3y_1-2y_2+x$;

(2) $y_1'=2y_1-5y_2,\ y_2'=y_1-2y_2+\operatorname{ctg}x\quad(0<x<\pi)$;

(3) $y_1'=2y_1-y_2+e^x,\ y_2'=3y_1-2y_2-e^x;\ y_1(0)=1,\ y_2(0)=1.$

2. 用代入求解:

(1) $y_1'=y_1+y_2+2e^x,\ y_2'=4y_1+y_2-e^x$;

(2) $y_1'=2y_1-5y_2-\sin 2x,\ y_2'=y_1-2y_2+x$.

3. 用拉氏变换求解:

(1) $y_1'=y_1+y_2,\ y_2'=4y_1-2y_2;\ y_1(0)=0,\ y_2(0)=1$;

(2) $y_1'=3y_1-2y_2+e^x,\ y_2'=2y_1-2y_2+2xe^x;\ y_1(0)=1,\ y_2(0)=0$;

(3) $\begin{cases} y_1''-3y_1'+2y_1+y_2'-y_2=0,\ y_1(0)=0,\ y_1'(0)=1, \\ y_1'-2y_1+y_2'+y_2=0,\ y_2(0)=0. \end{cases}$

4. 设 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{u}(x)$ 和 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{v}(x)$ 分别为方程组

$$\boldsymbol{y}'=A(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x)\quad 和\quad \boldsymbol{y}'=A(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{g}(x)$$

的解,则 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{u}(x)+\boldsymbol{v}(x)$ 为方程组

$$y' = A(x)y + f(x) + g(x)$$

的解．

第八章小结

本章的基本要求有：

1. 能够把高阶微分方程化成一阶微分方程组．
2. 能够叙述并应用一阶微分方程组的初值问题解的存在和唯一性定理；特别是对于一阶线性微分方程组．
3. 通过一些例题和习题，掌握用消去法求解的基本过程．
4. 对于齐次线性微分方程组，要掌握迭加原理、解组的线性相关和线性无关的充要条件、伏朗斯基行列式、基本解组、通解和刘维尔公式等．
5. 对于常系数齐次线性微分方程组，应该能够按照特征根的重数来假设所求解的形式（主要是明确其中多项式可能出现的最高次数和任意常数的个数）．对于特征根是复值的情况，能够从复值解得出实值解．
6. 对于非齐次线性微分方程组，能够应用常数变易法求特解；对于某些特殊的方程组，能够应用代入法．

第九章

第一积分与一阶偏微分方程式

对于某些简单的微分方程组，有时可以用初等积分法求它的"第一积分"，在本章的第一节中，我们先列举若干这样的例题，使读者可由此学到一些求解微分方程组的技巧，并增加对"第一积分"的感性认识．在第二节和第三节中，讨论一般微分方程组的"第一积分"理论．最后，顺便讨论一下一阶拟线性偏微分方程式的一些解法．

第一节　一些例题

本节中，列举一些求微分方程组的"第一积分"的例题．

【例题1】　求解微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y+x(x^2+y^2-1), & (1)\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=\quad x+y(x^2+y^2-1). & (2)\end{cases}$$

我们用 x 乘(1)式，再用 y 乘(2)式，然后相加，得

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=(x^2+y^2)(x^2+y^2-1),$$

亦即

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}(x^2+y^2)=(x^2+y^2)(x^2+y^2-1),$$

或

$$\frac{d(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)}=2\,dt.$$

对上式左端利用部分分式，得

$$\frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2-1}-\frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=2\,dt,$$

由此进行积分，就得到一个"第一积分"

$$\log(x^2+y^2-1)-\log(x^2+y^2)=2t+\log c_1,$$

通常把它写成如下形式

$$\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2}e^{-2t}=c_1. \tag{3}$$

其次，用 y 乘(1)式减去用 x 乘(2)式，得

$$y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}=-(x^2+y^2),$$

或

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=dt,$$

即

$$\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=dt.$$

由此积分，又得到另一个"第一积分"

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}-t=c_2. \tag{4}$$

最后，利用"第一积分"(3)和(4)得到通解 $x=\varphi(t;\,c_1,c_2)$，$y=\psi(t;\,c_1,\,c_2)$。不过，根据(3)和(4)的形式，采用极坐标 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ 是很方便的。对这个例子就不再往下深究了，因为我们在这里的目的只是求它的"第一积分"。

【例题 2】 求解微分方程组

$$\begin{cases} \alpha \dfrac{du}{dt}=(\beta-\gamma)vw, \\ \beta \dfrac{dv}{dt}=(\gamma-\alpha)wu, \\ \gamma \dfrac{dw}{dt}=(\alpha-\beta)uv, \end{cases} \tag{5}$$

其中 $\alpha>\beta>\gamma>0$ 是给定的常数.

分别用 u, v, w 乘方程组(5)中的三式并相加,即得

$$\alpha u \frac{du}{dt}+\beta v \frac{dv}{dt}+\gamma w \frac{dw}{dt}=0.$$

从而我们得到方程组(5)的一个"第一积分"

$$\alpha u^2+\beta v^2+\gamma w^2=c_1. \tag{6}$$

再分别用 αu, βv, γw 乘 (5) 中的三式并相加, 则得

$$\alpha^2 u \frac{du}{dt}+\beta^2 v \frac{dv}{dt}+\gamma^2 w \frac{dw}{dt}=0.$$

从而我们又得到方程组(5)的另一个"第一积分"

$$\alpha^2 u^2+\beta^2 v^2+\gamma^2 w^2=c_2. \tag{7}$$

利用"第一积分"(6)和(7),解出 u 和 v, 代入方程组(5), 即得

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma}\sqrt{(Aw^2+a)(-Bw^2+b)}, \tag{8}$$

其中 $A=\dfrac{\gamma(\beta-\gamma)}{\alpha(\alpha-\beta)}>0$, $B=\dfrac{\gamma(\alpha-\gamma)}{\beta(\alpha-\beta)}>0$; 而 a 和 b 是与 c_1 和 c_2 有关的常数. 微分方程(8)是变量分离的,因此

$$\int \frac{dw}{\sqrt{(Aw^2+a)(-Bw^2+b)}}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma}t+c.$$

【例题 3】 求解

$$(z-y)^2 \frac{dy}{dx}=z, \quad (z-y)^2 \frac{dz}{dx}=y. \tag{9}$$

我们可以把这微分方程组改写成如下形式

$$\frac{dx}{(z-y)^2}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{y}. \tag{10}$$

方程组(9)和(10)当然是等价的. 不过,方程组(10)不像方程组(9)那样专门指定 x 为自变量; 在方程组(10)中, 我们可以在 x, y 和 z 之中任选一个作为自变量. 在这个意义下, 通常称(10)的那种形式为对称的形式.

方程组(10)的第二个等号给出

$$y\,dy-z\,dz=0,$$

因此我们得到一个"第一积分"

$$y^2-z^2=c_1. \tag{11}$$

再把(10)的最后两式按分子与分母分别相减,则推出

$$\frac{dx}{(z-y)^2}=\frac{dy-dz}{y-z},$$

即

$$dx+(z-y)d(z-y)=0.$$

由此我们得到另一个"第一积分"

$$2x+(z-y)^2=c_2. \tag{12}$$

不难看出,由上面求得的两个"第一积分"(11)和(12),可得方程组(9)的通解.

【例题 4】 求解

$$\frac{dy}{dx}=1-\frac{1}{z},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{1}{y-x}. \tag{13}$$

我们把方程组(13)写成

$$dy-dx=-\frac{dx}{z},\quad \frac{dx}{y-x}=dz. \tag{14}$$

把方程组(14)中的两个式子左右分别相乘,再消去 dx, 即得

$$\frac{d(y-x)}{y-x}+\frac{dz}{z}=0.$$

由此我们得到一个"第一积分"

$$(y-x)z=c_1. \tag{15}$$

为了继续对(13)进行积分，由(15)得到

$$(y-x)=c_1/z,$$

代入(13)的第二式，即得

$$dx=c_1\frac{dz}{z}.$$

由此，我们用积分得到

$$\log z=\frac{x}{c_1}+\log c_2,$$

即

$$z=c_2e^{\frac{x}{c_1}}.$$

因此，我们得到微分方程组(13)的另一个"第一积分"

$$z\cdot e^{\frac{-x}{z(y-x)}}=c_2. \tag{16}$$

再由(15)和(16)，即得方程组(13)的通解.

最后，我们通过求"第一积分"来解决在第八章第一节中列出的那个二体问题.

【例题 5】 求解二体问题的运动方程

$$\begin{cases}\ddot{x}+\mu x\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}=0, & (17)\\ \ddot{y}+\mu y\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}=0, & (18)\\ \ddot{z}+\mu z\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}=0. & (19)\end{cases}$$

用 z 乘(18)式，同时用 y 乘(19)式，然后相减，得到

$$y\ddot{z}-z\ddot{y}=0,$$

因为 $y\ddot{z}-z\ddot{y}=\frac{d}{dt}(y\dot{z}-z\dot{y})$，所以我们得到一个"第一积分"

$$y\dot{z}-z\dot{y}=A, \tag{20}$$

其中 A 是一个常数．用类似的方法得到另外两个"第一积

分"

$$z\dot{x}-x\dot{z}=B, \tag{21}$$

$$x\dot{y}-y\dot{x}=C, \tag{22}$$

这里 B, C 也是积分常数，以下假定 $C>0$.

用 x、y 和 z 分别乘(20)、(21)和(22)，然后相加，就得

$$Ax+By+Cz=0. \tag{23}$$

这就是说，行星 P 在任何时刻 t 的位置坐标 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ 满足平面方程(23). 因此，P 的轨道是一平面曲线. 这样，由于已设 $C>0$，不妨设 $z=0$，即行星 P 在 (x, y) 平面上运动. 而且由(17)和(18)推出

$$(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})+\mu(x\dot{x}+y\dot{y})(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}=0,$$

或

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-2\mu\frac{d}{dt}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}=0.$$

所以我们又得到一个"第一积分"

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2-2\mu(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}=D. \tag{24}$$

应用极坐标变换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 则(24)可写成

$$\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2-\frac{2\mu}{r}=D; \tag{25}$$

而(22)可写成

$$r^2\dot{\theta}=C. \tag{26}$$

我们由(25)和(26)不难推出

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{\pm r^2}{C}\sqrt{D+\frac{2\mu}{r}-\left(\frac{C}{r}\right)^2},$$

或

$$\frac{d\left(\frac{C}{r}\right)}{\pm\sqrt{D+\left(\frac{\mu}{C}\right)^2-\left(\frac{C}{r}-\frac{\mu}{C}\right)^2}}=d\theta.$$

从而

$$\arccos\left[\frac{\dfrac{C}{r}-\dfrac{\mu}{C}}{\sqrt{D+\left(\dfrac{\mu}{C}\right)^2}}\right]=\theta-\theta_0.$$

由此可以解出

$$r=\frac{\dfrac{C^2}{\mu}}{1+\dfrac{C}{\mu}\sqrt{D+\left(\dfrac{\mu}{C}\right)^2}\cdot\cos(\theta-\theta)_0}. \tag{27}$$

公式 (27) 就是行星 P 的轨道方程. 由平面解析几何学知道，这轨道是一条二次曲线，它的离心率

$$e=\frac{C}{\mu}\sqrt{D+\left(\frac{\mu}{C}\right)^2}>0.$$

当 $e<1$ 时，轨道为一椭圆；当 $e=1$ 时，轨道为一抛物线；当 $e>1$ 时，轨道为一双曲线.

习 题 9·1

求下列各微分方程组的"第一积分"(或通解)：

1. $\dfrac{dx}{y+z}=\dfrac{dy}{z+x}=\dfrac{dz}{x+y}$.
2. $\dfrac{dx}{x(y^2-z^2)}=\dfrac{dy}{-y(z^2+x^2)}=\dfrac{dz}{z(x^2+y^2)}$.
3. $\dfrac{dx}{x(x+y)}=\dfrac{dy}{-y(x+y)}=\dfrac{dz}{(x-y)(2x+2y+z)}$.
4. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x-y}{z-t},\quad \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{x-y}{z-t},\quad \dfrac{dz}{dt}=x-y+1.$

第二节　第一积分的定义及其充要条件

设 n 阶微分方程组

$$\frac{dy_i}{dx}=F_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)\quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

的右端函数都在某个 $n+1$ 维的区域 $\mathscr{D}$ 内连续，且有连续的一阶偏导数.

定义 设函数 $V(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 不是常数，且对 $x, y_1, y_2, \cdots, y_n$ 有连续的一阶偏导数. 若沿着微分方程组 (1) 的任一积分曲线

$$\Gamma: y_1=y_1(x), y_2=y_2(x), \cdots, y_n=y_n(x)$$

上，函数 $V(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 取常值；亦即在 Γ 上，有

$$V(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)=C \tag{2}$$

（常数 C 与 Γ 有关），则称(2)是微分方程组(1)的一个第一积分.

显然，这个定义是上节所举"第一积分"的一般化说法. 而且我们看到，除非求得微分方程组(1)的所有的解，实际上是很难根据这个定义来判断 (2) 是否为方程组 (1) 的第一积分. 下面的定理帮助我们克服了这个困难.

定理1 设函数 $\Phi(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 不是常数，且对 $x, y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是连续可微的，则

$$\Phi(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)=C \tag{3}$$

是微分方程组(1)的一个第一积分的充要条件为

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}F_1+\frac{\partial\Phi}{\partial y_2}F_2+\cdots+\frac{\partial\Phi}{\partial y_n}F_n=0 \tag{4}$$

是关于 $x, y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的一个恒等式.

【证明】 先证必要性：设(3)是微分方程组(1)的一个第一积分，而且设任给微分方程组(1)的一条积分曲线 Γ: $y_1=y_1(x), y_2=y_2(x), \cdots, y_n=y_n(x)$，则由第一积分的定义，有

$$\Phi(x, y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x))\equiv\text{常数}, \tag{5}$$

这是关于 x 的一个恒等式. 所以对 x 微分此恒等式，就有

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}y_1'(x)+\frac{\partial\Phi}{\partial y_2}y_2'(x)+\cdots+\frac{\partial\Phi}{\partial y_n}y_n'(x)\equiv 0, \quad (6)$$

或在 Γ 上有恒等式

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}F_1+\frac{\partial\Phi}{\partial y_2}F_2+\cdots+\frac{\partial\Phi}{\partial y_n}F_n\equiv 0. \quad (7)$$

由于在区域 $\mathscr{D}$ 内的任一点都有方程组(1)的一条积分曲线通过，因此最后这个恒等式 (7) 也在 $\mathscr{D}$ 内成立，即恒等式 (4) 成立.

证明充分性：设恒等式 (4) 成立，特别它在积分曲线 Γ 上也成立，即(7)成立，从而(6)成立；因此

$$\frac{d}{dx}[\Phi(x,\ y_1(x),\ y_2(x),\ \cdots,\ y_n(x))]\equiv 0.$$

由此式取积分，推出(5)成立. 因为 Γ 是方程组(1)的任一积分曲线，所以由定义可见，(3)是微分方程组(1)的一个第一积分. 定理 1 得证. ▌

我们在第四章的第一节中也讲过二阶微分方程式的"第一积分"，实际上它可以统一在本节的第一积分的范畴内. 这里只须要对 n 阶微分方程式

$$y^{(n)}=f(x,\ y,\ y',\ \cdots,\ y^{(n-1)}) \quad (8)$$

的第一积分作如下的说明：

令 $y_1=y,\ y_2=y',\ \cdots,\ y_n=y^{(n-1)}$，则微分方程式(8)等价于微分方程组

$$\begin{cases} y_1'=y_2, \\ y_2'=y_3, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1}'=y_n, \\ y_n'=f(x,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n). \end{cases} \quad (9)$$

如果

$$V(x,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)=C \quad (10)$$

是微分方程组(9)的一个第一积分，那么我们就叫

$$V(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})=C \tag{11}$$

为微分方程式(8)的一个第一积分．因为由定理 1 知道，(10)是方程组(9)的第一积分的充要条件为

$$\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y_1}y_2+\frac{\partial V}{\partial y_2}y_3+\cdots+\frac{\partial V}{\partial y_n}f\equiv 0,$$

所以(11)是方程式(8)的第一积分的充要条件为

$$\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}y'+\frac{\partial V}{\partial y'}y''+\cdots+\frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}}f\equiv 0. \tag{12}$$

根据这个说明，也可验证

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}kx^2=C \tag{13}$$

是微分方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0 \tag{14}$$

的一个第一积分．事实上，这里

$$V=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}m(\dot{x})^2,\quad f=-\frac{k}{m}x,$$

从而

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}f\equiv kx\dot{x}+m\dot{x}\left(-\frac{k}{m}x\right)\equiv 0,$$

即恒等式(12)成立．

我们在第四章的第一节中曾经利用第一积分(13)解决了二阶微分方程式(14)的求解问题．而且在本章第一节还列举了许多这样的例子．一般而言，用第一积分可以消去某些未知函数(或降低原方程的阶)，这对于求解问题是很重要的．

定理 2 若已知微分方程组(1)的一个第一积分(2)，则可把含 n 个未知函数的一阶微分方程组(1)降低到一个含 $n-1$ 个未知函数的一阶微分方程组(即消去一个未知函数)．

【证明】 由第一积分的定义推出

$$\frac{\partial V}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial y_n}$$

不能都恒等于零．不妨设 $\frac{\partial V}{\partial y_n} \neq 0$，因此可以由(2)解出

$$y_n = u(x, y_1, \cdots, y_{n-1}; C), \tag{15}$$

而且由隐函数的微分公式，有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} \Big/ \frac{\partial V}{\partial y_n}, \quad \frac{\partial u}{\partial y_i} = -\frac{\partial V}{\partial y_i} \Big/ \frac{\partial V}{\partial y_n} \tag{16}$$

$$(i=1, \cdots, n-1),$$

把(15)代入方程组(1)的前 $n-1$ 等式，就消去了 y_n，从而得到一个含 $n-1$ 个未知函数的微分方程组

$$\frac{dy_i}{dx} = F_i(x, y_1, \cdots, y_{n-1}, u(x, y_1, \cdots, y_{n-1}; C)) \tag{17}$$

$$(i=1, \cdots, n-1),$$

假设求得方程组(17)的一个解为

$$y_1 = \varphi_1(x), \cdots, y_{n-1} = \varphi_{n-1}(x).$$

我们要证：函数组

$$\begin{aligned} &y_1 = \varphi_1(x), \cdots, y_{n-1} = \varphi_{n-1}(x), \\ &y_n = u(x, \varphi_1(x), \cdots, \varphi_{n-1}(x); C) \end{aligned} \tag{18}$$

是微分方程组(1)的解．

由于(17)成立，所以我们只要证明函数组(18)满足方程组(1)的最后一个等式就行了．事实上，由于

$$\begin{aligned} \frac{dy_n}{dx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y_1}\varphi_1'(x) + \cdots + \frac{\partial u}{\partial y_{n-1}}\varphi_{n-1}'(x) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y_1}F_1 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial y_{n-1}}F_{n-1}, \end{aligned}$$

其中 $y_n = u(x, \varphi_1(x), \cdots, \varphi_{n-1}(x); C)$，再利用(16)与第一积分的充要条件 $\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y_1}F_1 + \cdots + \frac{\partial V}{\partial y_n}F_n \equiv 0$，就有

$$\frac{dy_n}{dx}=-\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y_1}F_1+\cdots+\frac{\partial V}{\partial y_{n-1}}F_{n-1}\right)\Big/\frac{\partial V}{\partial y_n}=F_n,$$

这就是我们所需要的结果. 】

定理 3 设已知微分方程组(1)的 n 个独立的第一积分

$$V_i(x,\ y_1,\ \cdots,\ y_n)=C_i\quad (i=1,\ \cdots,\ n),\tag{19}$$

(这里独立的含义是雅可比行列式 $D(V_1,\ \cdots,\ V_n)/D(y_1,\ \cdots,\ y_n)$ 不等于零), 则由(19)解出的含 n 个任意常数的函数组

$$y_1=\varphi_1(x;\ c_1,\ \cdots,\ c_n),\ \cdots,\ y_n=\varphi_n(x;\ c_1,\ \cdots,\ c_n)\tag{20}$$

是微分方程组(1)的解(通常,称(20)为方程组(1)的通解).

【证明】 我们把(20)代入(19), 即得恒等式. 然后再对 x 求导数,就有

$$\frac{\partial V_i}{\partial x}+\frac{\partial V_i}{\partial y_1}\varphi_1'+\cdots+\frac{\partial V_i}{\partial y_n}\varphi_n'=0\quad (i=1,\ \cdots,\ n),\tag{21}$$

其中 $y_1,\ \cdots,\ y_n$ 由(20)确定.

另一方面,由第一积分的充要条件

$$\frac{\partial V_i}{\partial x}+\frac{\partial V_i}{\partial y_1}F_1+\cdots+\frac{\partial V_i}{\partial y_n}F_n=0\quad (i=1,\ \cdots,\ n)\tag{22}$$

可知, 当 $y_1,\ \cdots,\ y_n$ 用公式 (20) 代入时, 等式 (22) 当然也成立.

最后,我们按相同的 i 把(21)式与(22)式相减,就有

$$\frac{\partial V_i}{\partial y_1}(\varphi_1'-F_1)+\cdots+\frac{\partial V_i}{\partial y_n}(\varphi_n'-F_n)=0\quad (i=1,\ \cdots,\ n).$$

由于这联立方程组的系数行列式就是雅可比行列式

$$\frac{D(V_1,\ \cdots,\ V_n)}{D(y_1,\ \cdots,\ y_n)}\neq 0,$$

所以推出 $\varphi_1'-F_1=0,\ \cdots,\ \varphi_n'-F_n=0$. 这就证明了(20)是微分方程组(1)的解. 】

这里我们顺便指出,因为由(19)和(20),有

$$\frac{\partial V_i}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial c_j}+\cdots+\frac{\partial V_i}{\partial y_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial c_j}=\delta_{ij}\quad (i,\ j=1,\ \cdots,\ n),$$

所以

$$\frac{D(\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_n)}{D(c_1,\ \cdots,\ c_n)}=1\Big/\frac{D(V_1,\ \cdots,\ V_n)}{D(y_1,\ \cdots,\ y_n)}\neq 0.$$

下面叙述定理 3 的逆定理，而把它的证明留给读者.

定理 4 设函数组

$$y_1=\varphi_1(x;\ c_1,\ \cdots,\ c_n),\ \cdots,\ y_n=\varphi_n(x;\ c_1,\ \cdots,\ c_n)\qquad (23)$$

是微分方程组(1)的通解，亦即雅可比行列式

$$\frac{D(\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_n)}{D(c_1,\ \cdots,\ c_n)}\neq 0,$$

则由 (23) 可以解出微分方程组 (1) 的 n 个独立的第一积分

$$V_i(x,\ y_1,\ \cdots,\ y_n)=c_i\quad (i=1,\ \cdots,\ n).$$

由定理 3 和定理 4 可见，求微分方程组(或 n 阶微分方程式)的通解等价于求它的 n 个独立的第一积分。

习　题　9·2*

1. 证明定理 4.
2. 设已知微分方程组(1)的 k 个第一积分

$$V_i(x,\ y_1,\ \cdots,\ y_n)=C_i\quad (i=1,\ \cdots,\ k;\ 1\leqslant k<n)$$

是独立的，即矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial y_1} & \frac{\partial V_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial V_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial V_2}{\partial y_1} & \frac{\partial V_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial V_2}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial V_k}{\partial y_1} & \frac{\partial V_k}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial V_k}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

的秩等于 k，亦即这矩阵有一个不等于零的 k 阶行列式，例如，设

$$\frac{D(V_1, \cdots, V_k)}{D(y_1, \cdots, y_k)} \neq 0,$$

则利用这 k 个独立的第一积分可以从方程组 (1) 消去 k 个未知函数，而化成一个含 $n-k$ 个未知函数的一阶微分方程组.

3. 设 $V_1(x, y_1, \cdots, y_n)=c_1, \cdots, V_k(x, y_1, \cdots, y_n)=c_k$ 是微分方程组(1)的 k 个第一积分，并且 $H(z_1, \cdots, z_k)$ 是不等于常数的连续可微函数，则

$$H[V_1(x, y_1, \cdots, y_n), \cdots, V_k(x, y_1, \cdots, y_k)]=C$$

也是微分方程组(1)的一个第一积分.

第三节　第一积分的个数

设微分方程组

$$y_i'=F_i(x, y_1, \cdots, y_n) \quad (i=1, \cdots, n), \tag{1}$$

其中函数 $F_1, \cdots, F_n$ 在区域 $\mathscr{D}$ 上是连续可微的.

在实践上要找出方程组 (1) 的 n 个独立的第一积分是不容易的，可是在理论上证明方程组(1)存在 n 个独立的第一积分倒并不困难.

定理 1　微分方程组(1)有 n 个独立的第一积分.

【证明】　任给初值

$$y_1(x_0)=c_1, \cdots, y_n(x_0)=c_n, \tag{2}$$

其中$(x_0, c_1, \cdots, c_n)\in\mathscr{D}$，则由解的存在定理推出，初值问题(1)+(2)有且只有一个解

$$y_1=\varphi_1(x; c_1, \cdots, c_n), \cdots, y_n=\varphi_n(x; c_1, \cdots, c_n), \tag{3}$$

而且它关于初值 $c_1, \cdots, c_n$ 是连续可微的（参看第三章中关于解对初值的连续可微性定理）. 由于 $\varphi_i(x_0; c_1, \cdots, c_n)=c_i$ $(i=1, \cdots, n)$，所以有

$$\left.\frac{D(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)}{D(y_1, \cdots, y_n)}\right|_{x=x_0}=1.$$

由此可见，(3)是微分方程组(1)的通解．因此，由上一节的定理4就推出我们所需要的结论．∎

定理2 微分方程组(1)最多只有n个独立的第一积分．

【证明】 假设微分方程组(1)有$n+1$个第一积分

$$V_i(x, y_1, \cdots, y_n)=c_i \quad (i=1, \cdots, n+1).$$

由第一积分的充要条件，有

$$\frac{\partial V_i}{\partial x}+\frac{\partial V_i}{\partial y_1}F_1+\cdots+\frac{\partial V_i}{\partial y_n}F_n=0 \quad (i=1, \cdots, n+1). \tag{4}$$

因此，我们可以把1, F_1, …, F_n看作代数联立方程组(4)的一个非零解，从而联立方程组(4)的系数行列式必须等于零．这样一来，就推出雅可比行列式

$$\frac{D(V_1, V_2, \cdots, V_{n+1})}{D(x, y_1, \cdots, y_n)}=0.$$

这就是说，微分方程组(1)的任何$n+1$个第一积分都是函数相关的．定理2证完．∎

定理3 已知微分方程组(1)的n个独立的第一积分为

$$V_i(x, y_1, \cdots, y_n)=C_i \quad (i=1, \cdots, n); \tag{5}$$

又设$U(x, y_1, \cdots, y_n)=C$是方程组(1)的任意一个第一积分，则函数U可以表成$V_1, \cdots, V_n$的复合函数，即

$$U(x, y_1, \cdots, y_n)$$
$$=\Phi[V_1(x, y_1, \cdots, y_n), \cdots, V_n(x, y_1, \cdots, y_n)];$$

亦即第一积分$U(x, y_1, \cdots, y_n)=C$可用n个独立的第一积分(5)来表达：

$$\Phi[V_1(x, y_1, \cdots, y_n), \cdots, V_n(x, y_1, \cdots, y_n)]=C.$$

【证明】 因为(5)是n个独立的第一积分，即雅可比行列式

$$J=\frac{D(V_1, \cdots, V_n)}{D(y_1, \cdots, y_n)}\neq 0,$$

所以由 $V_i=V_i(x, y_1, \cdots, y_n)(i=1, \cdots, n)$ 可解出反函数组

$$y_i=y_i(x, V_1, \cdots, V_n) \quad (i=1, \cdots, n), \tag{6}$$

再用(6)代入函数 $U(x, y_1, \cdots, y_n)$，且令

$$\Phi(x, V_1, \cdots, V_n)=U(x, y_1, \cdots, y_n).$$

现在，我们只要证明上述函数 Φ 与 x 无关就行了．事实上有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial x}&=\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x}+\cdots+\frac{\partial U}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x}\\&=\frac{1}{J}\left[\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{D(V_1, \cdots, V_n)}{D(y_1, \cdots, y_n)}-\frac{\partial U}{\partial y_1}\cdot\frac{D(V_1, \cdots, V_n)}{D(x, y_2, \cdots, y_n)}\right.\\&\quad\left.-\cdots-\frac{\partial U}{\partial y_n}\cdot\frac{D(V_1, \cdots, V_n)}{D(y_1, \cdots, y_{n-1}, x)}\right]\\&=\frac{1}{J}\cdot\frac{D(U, V_1, \cdots, V_n)}{D(x, y_1, \cdots, y_n)}.\end{aligned}$$

由定理 2 推出上式最后的雅可比行列式恒等于零，因此 $\frac{\partial\Phi}{\partial x}\equiv 0$．从而 $\Phi(x, V_1, \cdots, V_n)$ 与 x 无关，令

$$\Phi[V_1, \cdots, V_n]=\Phi(x, V_1, \cdots, V_n).$$

因此有 $$U(x, y_1, \cdots, y_n)=\Phi[V_1, \cdots, V_n].$$

定理得证．】

第四节　一阶线性齐次偏微分方程式

常微分方程组的第一积分不仅对求解常微分方程本身有重要意义，而且对求解一阶偏微分方程式也有特殊的作用．通常在常微分方程的教程里也讲一点一阶偏微分方程式的求解问题，其主要原因是它与求第一积分的问题密切相关．我们已经看到第一积分的充要条件本身就是一个一阶的偏微分

方程式[见第二节中的(4)式].

现在，我们来考察一阶线性齐次偏微分方程式

$$A_1(x_1, \cdots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+A_n(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0, \qquad (1)$$

其中 $A_1, \cdots, A_n$ 是自变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的已知函数，而且假定它们在区域 $\mathscr{D}$ 内有连续的偏导数. 又设 $A_1, \cdots, A_n$ 不全为零. 在方程(1)中，u 是未知函数.

对应于偏微分方程式(1)，我们写出一个对称形状的常微分方程组

$$\frac{dx_1}{A_1}=\frac{dx_2}{A_2}=\cdots=\frac{dx_n}{A_n}. \qquad (2)$$

我们称(2)为(1)的特征方程. 求解偏微分方程式(1)的问题与特征方程(2)有何关系呢？请看下述定理.

定理 设已知特征方程(2)的 $n-1$ 个独立的第一积分

$$\psi_i(x_1, \cdots, x_n)=C_i \quad (i=1, \cdots, n-1), \qquad (3)$$

则一阶偏微分方程(1)的通解

$$u=\Phi[\psi_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \psi_{n-1}(x_1, \cdots, x_n)] \qquad (4)$$

包括了它的一切解，这里 Φ 是任意连续可微的函数.（注意，常微分方程组(2)须要有一个自变量，所以它只有 $n-1$ 个未知函数. 因此，它有并且只有 $n-1$ 个独立的第一积分.）

【证明】 把(4)代入(1)式的左边，得到

$$\sum_{i=1}^{n} A_i\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n} A_i\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\partial \Phi}{\partial \psi_s}\cdot\frac{\partial \psi_s}{\partial x_i}$$

$$=\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\partial \Phi}{\partial \psi_s}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\frac{\partial \psi_s}{\partial x_i}\right). \qquad (5)$$

由于(3)是方程组(2)或方程组

$$\frac{dx_i}{dx_n}=\frac{A_i}{A_n} \quad (i=1, \cdots, n-1; \text{ 设 } A_n\neq 0)$$

的第一积分，因此，由第一积分的充要条件

$$\frac{\partial\psi_s}{\partial x_n}+\frac{\partial\psi_s}{\partial x_1}\cdot\frac{A_1}{A_n}+\cdots+\frac{\partial\psi_s}{\partial x_{n-1}}\cdot\frac{A_{n-1}}{A_n}=0$$

推出

$$\sum_{i=1}^{n} A_i\frac{\partial\psi_s}{\partial x_i}=0\quad(s=1,\ \cdots,\ n-1),\tag{6}$$

从而由(5)得知(4)是偏微分方程式(1)的解.

以下要证，(4)包括偏微分方程式(1)的一切解.

设 $u=u(x_1,\ \cdots,\ x_n)$是(1)的任何一个解．若这是一个常数解，显然它可以表成(4)的形式，即只要取 Φ 是该常数就行；若 u 不是常数解，则由第一积分的充要条件以及偏微分方程式(1)可见

$$u(x_1,\ \cdots,\ x_n)=C$$

是方程组(2)的一个第一积分．因此，由上节定理3推出，函数 u 可以表成 $\psi_1,\ \cdots,\ \psi_{n-1}$ 的复合函数

$$u=\Phi_0[\psi_1(x_1,\ \cdots,\ x_n),\ \cdots,\ \psi_{n-1}(x_1,\ \cdots,\ x_n)],$$

即偏微分方程(1)的任何解 u 都可表达成(4)的形式．】

【例题1】 求解一阶偏微分方程

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0.\tag{7}$$

(7)的特征方程为

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}.$$

它只有一个独立的第一积分

$$x^2+y^2=C.$$

由此我们得到偏微分方程(7)的通解为

$$z=\Phi(x^2+y^2),\tag{8}$$

其中 Φ 是任意连续可微的函数．注意，(8)式表示旋转曲面.

如果对偏微分方程(7)再加初始条件

$$z\big|_{x=0}=\cos y, \tag{9}$$

把(9)代入(8)，则得到

$$\Phi(y^2)=\cos y.$$

从而确定
$$\Phi(u)=\cos\sqrt{u}.$$

所以我们得到初值问题(7)+(9)的解为 $z=\cos\sqrt{x^2+y^2}$.

【例题 2】 求解初值问题

$$\begin{cases}\sqrt{x}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\sqrt{y}\dfrac{\partial f}{\partial y}+\sqrt{z}\dfrac{\partial f}{\partial z}=0; & (10)\\ \text{当 } x=1 \text{ 时}, f=y-z. & (11)\end{cases}$$

首先求解偏微分方程(10)的特征方程

$$\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{dz}{\sqrt{z}},$$

易知它有两个独立的第一积分

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=c_1,\quad \sqrt{y}-\sqrt{z}=c_2.$$

因此，我们得到方程(10)的通解为

$$f=\Phi(\sqrt{x}-\sqrt{y},\ \sqrt{y}-\sqrt{z}). \tag{12}$$

由初始条件(11)得到

$$\Phi(1-\sqrt{y},\ \sqrt{y}-\sqrt{z})=y-z. \tag{13}$$

令 $1-\sqrt{y}=\xi,\quad \sqrt{y}-\sqrt{z}=\eta$, 则

$$y=(1-\xi)^2,\quad z=(1-\xi-\eta)^2.$$

因此，由(13)推出

$$\Phi(\xi,\eta)=(1-\xi)^2-(1-\xi-\eta)^2=\eta(2-2\xi-\eta). \tag{14}$$

从而由(12)和(14)，我们得到所求初值问题的解为

$$f=(\sqrt{y}-\sqrt{z})(2-2\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}).$$

【例题 3】 试求偏微分方程式

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots+x_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=0 \tag{15}$$

的通解.

首先写出偏微分方程式(15)的特征方程

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=\cdots=\frac{dx_n}{x_n}.$$

容易求出它的 $n-1$ 个独立的第一积分为

$$\frac{x_2}{x_1}=C_1, \frac{x_3}{x_1}=C_2, \cdots, \frac{x_n}{x_1}=C_{n-1}.$$

因而偏微分方程式(15)的通解为

$$u=\Phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \cdots, \frac{x_n}{x_1}\right), \tag{16}$$

其中 Φ 是任意的连续可微函数.

由表达式(16)易知，偏微分方程(15)的一切解都是零次齐次函数. 另一方面，在数学分析中已经证明，零次齐次函数 $u=u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 满足关系式(15).

习 题 9.4

1. 求下列一阶齐次线性偏微分方程式的通解:

(1) $(x^2-y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+2xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$;

(2) $(x-y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$;

(3) $(y+z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(z+x)\dfrac{\partial z}{\partial y}+(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial z}=0$;

(4) $a(b^2+c^2)\dfrac{\partial h}{\partial a}+b(c^2+a^2)\dfrac{\partial h}{\partial b}+c(b^2-a^2)\dfrac{\partial h}{\partial c}=0$.

2. 求解下列偏微分方程的初值问题:

(1) $\begin{cases}(x-y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\\ \text{当 } x=1 \text{ 时}, z=f(y);\end{cases}$

(2) $\begin{cases}(y+z)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(z+x)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(x+y)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0,\\ \text{当 } z=0 \text{ 时}, u=x^3.\end{cases}$

第五节　一阶拟线性偏微分方程式

我们在这一节讨论下面形式的一阶偏微分方程式

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1, \cdots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = B(x_1, \cdots, x_n, u), \tag{1}$$

其中 $A_1, \cdots, A_n, B$ 关于变元 $x_1, \cdots, x_n, u$ 是连续可微的. 偏微分方程式(1)有一个特点,即它关于未知函数 u 的各个一阶偏导数都是线性的(不管未知函数 u). 我们称这种形式的方程式 (1) 为**一阶拟线性偏微分方程式**. 为了使读者便于比较,我们顺便写出一阶线性偏微分方程式的一般形式

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1, \cdots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}$$
$$= B_0(x_1, \cdots, x_n) + B_1(x_1, \cdots, x_n)u. \tag{2}$$

当然, 它也可以包括在方程 (1) 的形式之内. 特别, 当 B_0 和 B_1 都恒等于零时, 方程式 (2) 就是我们在上一节讨论过的那种一阶线性齐次偏微分方程式.

为了简单起见,在这里只讨论 $n=2$ 的情形. 这时方程式(1)也可写成如下形式

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z), \tag{3}$$

其中函数 P, Q, R 都是连续可微的,而且设 $P^2+Q^2 \neq 0$.

我们把偏微分方程式 (3) 的解 $z=z(x, y)$(如果有的话)写成如下的隐式

$$V(x, y, z) = 0. \tag{4}$$

则由隐函数偏导数的关系式, 有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x}\Big/\frac{\partial V}{\partial z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial y}\Big/\frac{\partial V}{\partial z}.$$

再代入方程式(3)，就推得

$$P(x, y, z)\frac{\partial V}{\partial x}+Q(x, y, z)\frac{\partial V}{\partial y}+R(x, y, z)\frac{\partial V}{\partial z}=0. \tag{5}$$

注意，这等式不是关于 x, y, z 的恒等式，而是假定了(4)是偏微分方程式(3)的隐式解这个前提下成立的. 因此，等式(5)还不是我们在上一节讨论过的那种一阶线性齐次偏微分方程式.

以下，我们重新考察等式(5)，姑且把 x, y, z 看作独立的自变量，而 V 是一个未知函数，亦即把方程式(5)看作一个一阶线性齐次偏微分方程式. 问题在于求解方程式(5)与求解原来的方程式(3)有什么关系?

定理 设已知一阶线性齐次偏微分方程式(5)的通解为

$$V=V[\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z)],$$

其中 $\varphi(x, y, z)=c_1$ 与 $\psi(x, y, z)=c_2$ 是相应特征方程

$$\frac{dx}{P(x, y, z)}=\frac{dy}{Q(x, y, z)}=\frac{dz}{R(x, y, z)} \tag{6}$$

的两个独立的第一积分；$V[u, v]$ 是任意连续可微函数. 则偏微分方程式(3)的通解为

$$V[\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z)]=0. \tag{7}$$

【证明】 这里须要证明两件事:

1) 由关系式(7)确定的 $z=z(x, y)\left(设 \dfrac{\partial V}{\partial z}\neq 0\right)$ 是偏微分方程式(3)的解;

2) 偏微分方程式(3)的任何一个解 $z=f(x, y)$ 都可以表成(7)的形式，即存在某个函数 V_0，使得

$$V_0[\varphi(x, y, f(x, y)), \psi(x, y, f(x, y))]\equiv 0.$$

这就是说，函数

$$\Phi(x, y)=\varphi(x, y, f(x, y)),$$

$$\Psi(x, y)=\psi(x, y, f(x, y))$$

是相关的.

首先证明 1)：因为由(7)确定的 $z=z(x, y)$ 满足

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial V}{\partial x}\Big/\frac{\partial V}{\partial z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial y}\Big/\frac{\partial V}{\partial z},$$

而且 V 满足(5)，所以只要用 $-\frac{\partial V}{\partial z}$ 除方程(5)，就推出等式

$$P(x, y, z(x, y))\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x, y, z(x, y))\frac{\partial z}{\partial y}$$
$$=R(x, y, z(x, y))$$

成立，即 $z=z(x, y)$ 是偏微分方程式(3)的一个解.

其次证明 2)：因为 $z=f(x, y)$ 是方程式(3)的解，而且

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y}=\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

所以当 $z=f(x, y)$ 时，有

$$P\frac{\partial \Phi}{\partial x}+Q\frac{\partial \Phi}{\partial y}=P\frac{\partial \varphi}{\partial x}+Q\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\left(P\frac{\partial f}{\partial x}+Q\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$
$$=P\frac{\partial \varphi}{\partial x}+Q\frac{\partial \varphi}{\partial y}+R\frac{\partial \varphi}{\partial z}=0.$$

(注意，最后的等号是由于 $\varphi(x, y, z)=c_1$ 为上面特征方程(6)的一个第一积分.) 同理，$P\frac{\partial \Psi}{\partial x}+Q\frac{\partial \Psi}{\partial y}=0$. 这样，我们证明了，当 $z=f(x, y)$ 时，就有

$$
\begin{cases}
P\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}+Q\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\equiv 0,\\
P\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}+Q\dfrac{\partial\Psi}{\partial y}\equiv 0.
\end{cases} \tag{8}
$$

由于 $P^2+Q^2\neq 0$，所以由(8)推出雅可比行列式

$$
\frac{D(\Phi,\ \Psi)}{D(x,\ y)}\equiv 0.
$$

因此，函数 Φ 与 Ψ 是相关的. 定理证完. ▌

这个定理提供了一个求解一阶拟线性偏微分方程式(3)的方法.

【例题 1】 求解

$$
\sqrt{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{z}.
$$

我们先解特征方程

$$
\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{dz}{\sqrt{z}},
$$

它有两个独立的第一积分

$$
\sqrt{x}-\sqrt{y}=c_1,\ \sqrt{y}-\sqrt{z}=c_2.
$$

因此，利用上面的定理，我们得到所求的通解为

$$
\Phi(\sqrt{x}-\sqrt{y},\ \sqrt{y}-\sqrt{z})=0, \tag{9}
$$

其中 $\Phi(\xi,\ \eta)$ 是任意的连续可微函数，且设 $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\eta}\neq 0$. 因此，可由(9)解出

$$
\sqrt{y}-\sqrt{z}=\varphi(\sqrt{x}-\sqrt{y}). \tag{10}
$$

即得方程(3)的显式的通解

$$
z=[\sqrt{y}-\varphi(\sqrt{x}-\sqrt{y})]^2. \tag{11}
$$

【例题 2】 求解初值问题

$$\begin{cases} \sqrt{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{z}, \\ \text{当 } y=0 \text{ 时}, \quad z=\log x. \end{cases}$$

我们可以利用通解(11)，令 $y=0$，则有

$$[\varphi(\sqrt{x})]^2=\log x,$$

或 $\varphi(\sqrt{x})=-\sqrt{\log x}$ [这里只取负号的原因可从(10)看出，事实上，在(10)中令 $y=0$，可知 $\varphi(\sqrt{x})$ 是负的]，因而

$$\varphi(\xi)=-\sqrt{\log \xi^2}.$$

因此得到所求初值问题的解为

$$z=[\sqrt{y}+\sqrt{\log(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}]^2.$$

我们注意到，如果把例题1的通解写成

$$\Phi(\sqrt{x}-\sqrt{z},\ \sqrt{y}-\sqrt{z})=0,$$

那么就得不到(11)。这样，在例题2的求解中就会发生困难。这就是说，在上面采用的初值问题的解法是带有特殊性的。在下一节，我们要寻求一个解决一阶拟线性偏微分方程式的初值问题的一般法则。

习　题　9.5

1. 证明一阶偏微分方程式

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+x_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=mz \quad (m\text{ 是整数})$$

的解 $z=z(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 m 次齐次函数。

2. 求下列方程式的通解：

(1) $(y+z+u)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(z+u+x)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(u+x+y)\dfrac{\partial u}{\partial z}=x+y+z$；

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}+b\dfrac{\partial u}{\partial y}+c\dfrac{\partial u}{\partial z}=xyz$ （b, c 是常数）；

(3) $(y^3x-2x^4)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(2y^4-x^3y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=9z(x^3-y^3)$.

3. 求解

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=mf \quad (m\text{是正整数}), \\ \text{当 } x=1 \text{ 时}, f=e^y. \end{cases}$$

第六节 特征线方法

设一阶拟线性偏微分方程式

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x, y, z), \qquad (1)$$

其中 P, Q, R 都是在区域 $\mathscr{D}$ 上的连续可微函数，且 $P^2+Q^2\neq 0$。

这一节的主要内容是对偏微分方程式(1)的解作几何解释，从而对它的初值问题引出特征线解法。

写出与(1)相应的特征方程

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}. \qquad (2)$$

在偏微分方程(1)的定义区域 $\mathscr{D}$ 内每一点 $M(x, y, z)$上作一向量

$$\boldsymbol{v}_M=(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

这样，就在区域 $\mathscr{D}$ 上建立了一个向量场．显然，若特征方程(2)的积分曲线 Γ 经过 M 点，则 $\boldsymbol{v}_M$ 是 Γ 在 M 点的一个切向量．以后，我们称特征方程(2)的积分曲线为**特征曲线**，而称 $\boldsymbol{v}_M$ 为**特征向量**.

给定偏微分方程式(1)的任何一个解 $z=z(x, y)$，它的几何图形是一个曲面 S，我们称 S 为**积分曲面**．设在积分曲面 S 上任取一点 M，则 S 在 M 点的法向量为

$$n_M=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ -1\right).$$

由方程式(1)推出，v_M 与 n_M 的数量积等于零，即它们是互相垂直的．由此可见，在 M 点的特征向量 v_M 只能与积分曲面 S 在 M 点相切，亦即过 M 点的特征曲线 Γ 只能与 S 相切，而不能横截．

以下，我们来说明积分曲面 S 是由特征曲线构成的，参看图 9-1．这须要说明下面三件事：

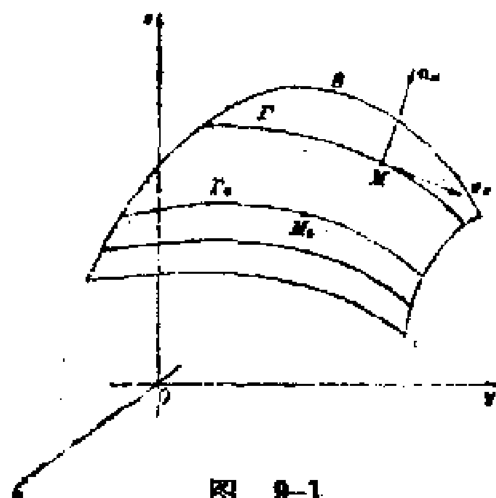


图 9-1

1) 通过 S 上的任何一点 M 恰有一条特征曲线 Γ．

这个结论可从常微分方程组(2)关于初值问题解的存在和唯一性定理推得．

2) 在 S 上任取一点 M_0，设 Γ_0 是通过点 M_0 的那条特征曲线，则 Γ_0 一定完全坐落在 S 上．

事实上，设特征方程(2)的两个独立的第一积分为

$$\varphi(x,\ y,\ z)=c_1,\ \psi(x,\ y,\ z)=c_2,$$

它们确定(2)的积分曲线．因此，特征曲线 Γ_0 应该满足：

$$\varphi(x,\ y,\ z)=c_1^0,\ \psi(x,\ y,\ z)=c_2^0,\ M_0(x_0,\ y_0,\ z_0), \qquad (3)$$

其中

$$c_1^0=\varphi(x_0,\ y_0,\ z_0),\ c_2^0=\psi(x_0,\ y_0,\ z_0).$$

而且根据上节的定理，S 可以表达成下列隐式：

$$V_1[\varphi(x,\ y,\ z),\ \psi(x,\ y,\ z)]=0.$$

因为 M_0 在 S 上，所以

$$V_1[\varphi(x_0,\ y_0,\ z_0),\ \psi(x_0,\ y_0,\ z_0)]=0,$$

即 $V_1[c_1^0,\ c_2^0]=0$．因此，由(3)推出，在特征曲线 Γ_0 上，有

$V_1[\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z)]=0$. 这就是说，$\Gamma_0$ 完全坐落在 S 上.

3) 由特征曲线构成的光滑曲面 F: $z=f(x, y)$是方程式(1)的积分曲面.

事实上，曲面 F 在点 $M(x, y, z)$的法向量为

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right),$$

它必与特征向量

$$\boldsymbol{v}_M=(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

垂直，从而

$$P\frac{\partial f}{\partial x}+Q\frac{\partial f}{\partial y}-R=0$$

在 M 点成立. 由于 M 是曲面 F 上的任意一点，因此，$z=f(x, y)$是方程式(1)的一个解，亦即 F 是一个积分曲面.

利用上述几何说明，我们来求解初值问题

$$\begin{cases} P(x, y, z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+Q(x, y, z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=R(x, y, z) \quad (P\neq 0); \\ z|_{x=x_0}=h(y) \quad (h(y)\text{是给定的连续可微函数}). \end{cases}$$

通常，也叫初值问题为柯西问题. 这个柯西问题表示偏微分方程的一个积分曲面 S: $z=z(x, y)$ 经过一条给定的空间曲线 γ: $x=x_0$, $z=h(y)$.

因为我们已经从上面得知：积分曲面 S 应由特征曲线族

$$\varphi(x, y, z)=c_1, \quad \psi(x, y, z)=c_2 \tag{4}$$

中的某些特征曲线构成. 问题是要确定哪些特征曲线构成这个积分曲面？ 这相当于要对 (4) 中的参数 c_1、c_2 之间确定一个关系式 $U_0(c_1, c_2)=0$. 在几何上容易看出：积分曲面 S 是由串连 γ 上的所有特征曲线构成的(参看图 9-2).

因为γ在点$M(x_0, y, h(y))$的切向量为

$$\tau_M=(0, 1, h'(y));$$

而通过M点的特征曲线Γ在M点的切向量为

$$v_M=(P, Q, R).$$

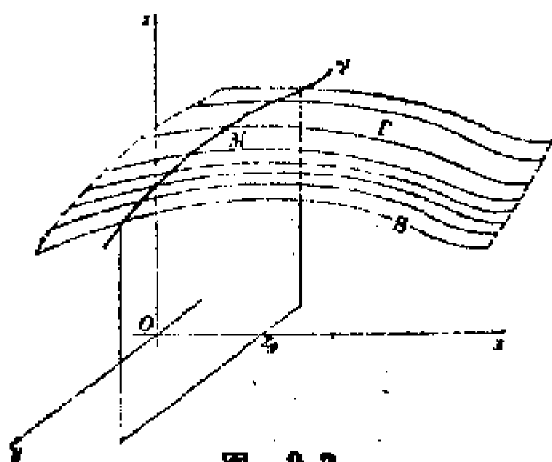


图 9-2

由于设$P\neq 0$,所以v_M与τ_M不能共线，即特征曲线Γ不能与初始曲线γ相切，而只能横截．因此,当M点在γ上扫过一遍时,相应的那些特征曲线将组成一个积分曲面S.(注意,当γ与Γ相切,特别当γ与Γ重合时,就不一定能得到这样的积分曲面S.)

设特征曲线Γ与初始曲线γ相交于点$M(x_0,y,h(y))$,则Γ应该满足(4),其中

$$c_1=\varphi(x_0, y, h(y)),\ c_2=\psi(x_0, y, h(y)). \tag{5}$$

由(5)消去y，设能得到$U_0(c_1, c_2)=0$．这就是在(4)中所有构成积分曲面S的那些特征曲线须要满足的条件．因此，积分曲面S由隐式

$$U_0(\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z))=0$$

给出．上面所讲的解法就是通常所说特征线法．

【例题 1】 求解柯西问题

$$\begin{cases}\sqrt{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{z},\\ \text{当 } x=1 \text{ 时}, z=y^2.\end{cases}$$

相应特征方程

$$\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{dz}{\sqrt{z}}$$

的两个独立的第一积分为

$$\sqrt{x}-\sqrt{z}=c_1,\ \sqrt{y}-\sqrt{z}=c_2.$$

由初始条件得

$$c_1=1-y,\ \ c_2=\sqrt{y}-y.$$

由此消去 y, 得到参数 c_1, c_2 之间的一个关系式

$$c_2=\sqrt{1-c_1}+c_1-1.$$

因此,所求的积分曲面为

$$\sqrt{y}-\sqrt{z}=\sqrt{1-\sqrt{x}+\sqrt{z}}+\sqrt{x}-\sqrt{z}-1.$$

或

$$z=[(\sqrt{y}-\sqrt{x}+1)^2+\sqrt{x}-1]^2.$$

在上述特征线法中,我们要求 $P\neq 0$(当 $x=x_0$ 时)来保证特征曲线不与初始曲线 γ 相切. 否则,所述柯西问题可能无解,或有解而不唯一. 请看下面两个简单的例子:

【例题 2】 求解

$$\frac{\partial z}{\partial y}=z;\quad 当\ x=0\ 时, z=y^2.$$

注意,这里相应的 $P=0$. 直接由所给的偏微分方程推出

$$\frac{\partial}{\partial y}[ze^{-y}]=0.$$

从而推出所求的通解为

$$z=C(x)e^y,$$

其中 $C(x)$ 是一个任意的连续可微函数. 由初始条件得

$$C(0)e^y=y^2,$$

这个对 y 的恒等式是不能成立的. 因此,这里的柯西问题无解.

【例题 3】 求解

$$\frac{\partial z}{\partial y}=z;\quad 当\ x=0\ 时,\quad z=e^y.$$

与上例相同，推得通解为

$$z=C(x)e^y.$$

再由初始条件得到

$$C(0)e^y=e^y.$$

从而 $C(0)=1$. 所以只要取满足 $C(0)=1$ 的任何连续可微的函数 $C(x)$, $z=C(x)e^y$ 都是柯西问题的解. 例如, $z=e^y$, $z=e^x\cdot e^y$ 和 $z=\cos x\cdot e^y$ 都是这样的解. 这就是说，所述柯西问题的解是不唯一的(注意，这里也是 $P=0$).

习　题　9·6

用特征线法求解下列柯西问题：

1. $\begin{cases}(1+\sqrt{z-x-y})\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=2; \\ 当\ y=0\ 时,\ z=2x.\end{cases}$

2. $\begin{cases}z(x+z)\dfrac{\partial z}{\partial x}-y(y+z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0; \\ 当\ x=1\ 时,\ z=\sqrt{y}.\end{cases}$

3. $\begin{cases}(mz-ny)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(nx-lz)\dfrac{\partial z}{\partial y}=ly-mx; \\ 当\ x=y\ 时,\ z=y^2\quad (l,\ m,\ n\ 是常数).\end{cases}$

4. 证明偏微分方程 $P\dfrac{\partial z}{\partial x}+Q\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 的特征曲线都是平面曲线.

第九章小结

这一章的内容有两部分：

第一部分是关于常微分方程组的第一积分. 在一定的意义上来讲，这部分内容是初等积分法的理论概括，也是常微分

方程组本身的基本理论．它有助于我们对通解、第一积分和独立的任意常数等概念有进一步的认识．这部分内容对数学分析的要求较多，读者如果时间不多，在重点掌握第一节的一些例题之后，只要看一看在第二和第三节中几个定理的叙述，它们的结论是很容易理解的．

第二部分是一阶偏微分方程式与上述第一积分有关的一些解法．在第四节中讲了一阶线性齐次偏微分方程式的解法，它实际上归结到求解一个常微分方程组（即特征方程）的 n 个独立的第一积分；在第五节中讲了一阶拟线性偏微分方程式

$$P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}=R$$

的解法，主要问题也归结到求解特征方程

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$$

的两个独立的第一积分；在第六节中，对上面的一阶拟线性偏微分方程式的解作了几何上的说明，搞清楚了它的积分曲面是由特征曲线（即特征方程的积分曲线）构成的．因此，推导出一种求解柯西问题的特征线法．

习题答案

第一章

习题 1·1

2. 最大高度≈31.89(米)；落地时间≈5.10(秒)。

4. 静止；

5*. 因为在图1-2的(a)中，重力已与S的一部分恢复力平衡了。

6*. 运动方程为$m\ddot{x}=-k_1x-k_2x$；初始条件为$x(0)=x_0$，$\dot{x}(0)=v_0$。

习题 1·2

3. 在第4行中$\lambda\neq-1$例外；在第5行中$\lambda\neq1$例外。

第二章

习题 2·1

1. (1) $3y^2-2x^3=c\quad(y\neq0)$；

(2) $3y^2-2\log|1+x^3|=C\quad(1+x^3\neq0,\ y\neq0)$；

(3) $\dfrac{1}{y}+\cos x=C$，特解$y=0$；

(4) $\operatorname{arctg}y-x-\dfrac{1}{2}x^2=C$；

(5) $2\operatorname{tg}2y-2x-\sin2x=C$，特解$y=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{n\pi}{2}$；

(6) $\arcsin y-\log|x|=C\quad(x\neq0,\ |y|\leqslant1)$，特解$y=\pm1$；

(7) $y^2-x^2+2(e^y-e^{-x})=c\quad(y+e^y\neq0)$。

2. (1) $2\sin3y-3\cos2x=3$；　(2) $2(x-1)e^x+y^2+1=0$；

(3) $r=2e^\theta$；　(4) $y+\dfrac{1}{3}y^3-x\log x+x=1$；

(5) $y^{-2}+2(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=3$。

4. $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{\sqrt{b^2-y^2}}$; $x=\dfrac{1}{2}b\log\dfrac{b+\sqrt{b^2-y^2}}{b-\sqrt{b^2-y^2}}-\sqrt{b^2-y^2}$.

习 题 2·2

1. (1) $y=ce^{-3x}+\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{9}+e^{-2x}$; (2) $y=ce^{2x}+\dfrac{1}{3}x^3e^{2x}$;

   (3) $y=(c-2x\cos x+2\sin x)\cos x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$;

   (4) $y=[c+(x-1)e^x]/x^2 \quad (x>0)$.

2. (1) $y=3e^x+2(x-1)e^{2x} \quad (-\infty<x<\infty)$;

   (2) $y=e^{-x}\displaystyle\int_0^x\frac{e^t}{1+t^2}dt \quad (-\infty<x<\infty)$;

   (3) $y=(2x+1-\pi)/\sin x \quad (0<x<\pi)$;

   (4) $y=(\sin x-x\cos x)/x^2 \quad (x>0)$.

3. (1) $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{c}{x^2}$, 对一切 c, $\lim\limits_{x\to0}|y|=\infty$;

   (2) $y=x^2+cx$, 对一切 c, $\lim\limits_{x\to0}y=0$;

   (3) $y=cx+2x^{\frac{3}{2}}$, 对一切 c, $\lim\limits_{x\to0}y=0$ (但 $\lim\limits_{x\to0}y''=\infty$);

   (4) $y=(c+\sin x)/x$, $\lim\limits_{x\to0}y=\begin{cases}1, & 当\ c=0\ 时,\\ \pm\infty, & 当\ c\neq0\ 时.\end{cases}$

4* (1) $y^2=ce^x-x^2-2x-2$; (2) $x=ce^y-y-1$.

7* 所求的周期解为

$$x(t)=\frac{1}{e^{2a\pi}-1}\int_t^{t+2\pi}f(s)e^{-a(t-s)}ds.$$ 证明从略.

习 题 2·3

1. (1) $y=cx+x\log|x|$; (2) $y-x=c(x+y)^3$;

   (3) $x^2y^2+2x^3y=C$.

2. (1) $y=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{cx+x\log|x|}$;

   (2) $y=2x+\dfrac{x^3}{Ce^{4x}-\dfrac{1}{4}\left(x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{8}\right)}$.

3. $y=\left\{e^{\int(n-1)P(x)\,dx}\left[\int(1-n)q(x)\,e^{\int(1-n)P(x)\,dx}dx+C\right]\right\}^{\frac{1}{1-n}}$.

4. $u'=-u^2-P(x)u-q(x)$.

5. (1) $x+\operatorname{ctg}\dfrac{x-y}{2}=C$; (2) $y=\operatorname{tg}^{-1}(x+y)+C$;

(3) $x^2-2xy^2-y^4=C$; (4) $\sqrt{y}\left(2-3\dfrac{\sqrt{y}}{x}\right)^{\frac{1}{3}}=C$;

(5) 当 $a\neq0$ 时，$y^3=ce^{ax}-\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{a}(x+1)$;

当 $a=0$ 时，$y^3=\dfrac{1}{2}(x+1)^2+C$.

(6) $\sin y=\left[1-2e^{x^2}\int e^{-x^2}dx+ce^{x^2}\right]^{-2}$;

(7) $(y-x+3)=C(y+x+1)^3$;

(8) $x^2=C\dfrac{(t-1)^2}{(t-2)^3}-2$, $y^2=C\dfrac{t(t-1)^2}{(t-2)^3}-1$;

(9) $(\operatorname{tg}^{-1}y+C)\left[1-\operatorname{tg}\left(\dfrac{\operatorname{tg}^{-1}y-\operatorname{tg}^{-1}x}{2}\right)\right]=2$.

6. (1) 当 $b_1\neq0$ 时，令 $z=a_1x+b_1y+c_1$;

(2) 令 $\xi=x+h$, $\eta=y+k$, 选取常数 h 和 k, 使新方程为齐次方程.

7. $r=ce^{\theta}$ (或 $r=ce^{-\theta}$).

8* $y(x)=nxy'(x)$; $\varphi(x)=\dfrac{c}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.

习 题 2·4

1. $x^2+3x+y^2-2y=C$.

2. 不是恰当方程.

3. $ax^2+2bxy+cy^2=k$ (任意常数).

4. 不是恰当方程.

5. $3x^3+xy-x-2y^2=C$.

6. $x^2y^2+2xy=C$.

7. $e^x\sin y+2y\cos x=C$.

8. 不是恰当方程.

9. $y\log x+3x^2-2y=C$.

10. $x^2+y^2=C$.

习 题 2·5

1. (1) $\mu=e^{3x}$, $(3x^2y+y^3)e^{3x}=C$;

(2) $\mu=e^{-x}$, $y=ce^x+1+e^{2x}$;

(3) $\mu=y,\ xy+y\cos y-\sin y=C$;

(4) $\mu=\frac{1}{y}e^{2x},\ xe^{2y}-\log|y|=C$;

(5) $\mu=\sin y,\ e^{x}\sin y+y^{2}=C$;　　(6) $\mu=xy,\ x^{3}y+3x^{2}+y^{2}=C$.

习　题　2·6

1. (1) $x^2+y^2=cy$;　　(2) $y^2-x^2=C$;

   (3) $x^2-2cy=c^2\quad(c>0)$;　　(4) $x^2+y^2-\log x^2=C$.

2. (1) $y-3x=C$;　　(2) $x^2-y^2+2xy=C$.

3. $v_0=\sqrt{2gR}$.

第　四　章

习　题　4·1

1. (1) $y=A\cos(\sqrt{3}x+\theta)$　($A,\ \theta$ 是任意常数);

   (2) $y=c_1e^{\sqrt{3}x}+c_2e^{-\sqrt{3}x}$;　　(3) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{c_1-x^2+\frac{1}{2}x^4}}=t+c_2$;

   (4) $y=\cosh(x+c_1)+c_2$;　　(5) $\log y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}$;

   (6) $x=c_1(\varphi-\sin\varphi)+c_2,\ y=2a+c_1(1-\cos\varphi)$;

   (7) $y=c_2xe^{-\frac{c_1}{x}}$.

习　题　4·2

2. [提示：把 $y=u(x)z$ 代入方程，然后令 z' 的系数等于零，从而确定 $u(x)=e^{-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx}$，$Q(x)=q(x)-\frac{1}{4}p(x)^2-\frac{1}{2}p'(x)$.]

3. [提示：用 $e^{\int p(x)\,dx}$ 乘齐次方程(10).]

习　题　4·3

2. $q(x)=-1$; $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}$.

习　题　4·4

1. (1) $y=c_1e^{\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)x}+c_2e^{\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)x}$;

(2) $y=e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$;

(3) 当 $|\lambda|>2$ 时，$y=c_1e^{\frac{-\lambda+\sqrt{\lambda^2-4}}{2}x}+c_2e^{\frac{-\lambda-\sqrt{\lambda^2-4}}{2}x}$;

当 $|\lambda|=2$ 时，$y=e^{\frac{-\lambda}{2}x}(c_1+c_2x)$;

当 $|\lambda|<2$ 时，$y=e^{-\frac{\lambda}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{2}x\right)$.

(4) 当 $a>0$ 时，$y=c_1\cos\sqrt{a}x+c_2\sin\sqrt{a}x$;

当 $a=0$ 时，$y=c_1x+c_2$;

当 $a<0$ 时，$y=c_1e^{\sqrt{-a}x}+c_2e^{-\sqrt{-a}x}$.

(5) $y=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3$;

(6) $y=c_1e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$;

(7) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x$.

2. $a=n^2\quad(n=1, 2, 3, \cdots)$.

习 题 4.5

2. $y=c_1\cos at+c_2\sin at+\frac{1}{a}\int_0^t f(\xi)\sin a(t-\xi)d\xi$

3. (1) $y=e^{x}-\frac{1}{2}e^{-2x}-x-\frac{1}{2}$;

(2) $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}-\frac{1}{2}e^{2x}$;

(3) $y=\frac{7}{10}\sin 2x-\frac{19}{40}\cos 2x+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}+\frac{3}{5}e^{x}$;

(4) $y=c_1+c_2e^{-2x}+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x$;

(5) $y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x+\frac{1}{18}\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)e^{3x}+\frac{2}{3}$;

(6) $y=e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{1}{2}-\frac{1}{13}\sin 2x$

$+\frac{3}{26}\cos 2x$;

(7) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+\frac{1}{6}xe^{2x}+\frac{1}{8}e^{-2x}$.

第 五 章

习 题 5·1

1. (1) $R=1$; (2) $R=2$; (3) $R=\infty$;

(4) $R=\dfrac{1}{2}$; (5) $R=\dfrac{1}{2}$; (6) $R=0$.

2. (1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R=\infty$; (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, $R=\infty$;

(3) $1+(x-1)$, $R=\infty$;

(4) $1-2(x+1)+(x+1)^2$, $R=\infty$;

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(x-1)^n}{n}$, $R=1$; (6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, $R=1$;

(7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$, $R=1$; (8) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(x-2)^n$, $R=1$.

3 $y'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$, $y''=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$.

习 题 5·2

1. (1) $a_{n+2}=a_n/(n+2)(n+1)$,

$$y_1(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\cosh x,$$

$$y_2(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots=\sinh x;$$

(2) $a_{n+2}=a_n/(n+2)$,

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!},\quad y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n n!\,x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

(3) $(n+2)a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$,

$$y_1(x)=1+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{6}(x-1)^3+\frac{1}{6}(x-1)^4+\cdots,$$

$$y_2(x)=(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3+\frac{1}{4}(x-1)^4+\cdots;$$

(4) $(n+2)(n+1)a_{n+2}=n(n+1)a_{n+1}-a_n$, $(n\geqslant 1)$; $a_2=\dfrac{-a_0}{2}$,

$$y_1(x)=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{24}x^4-\cdots,$$

$$y_2(x)=x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{12}x^4-\cdots.$$

2. (1) $y''(0)=-1,\ y'''(0)=0,\ y^{(4)}(0)=3;$

$$y=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+\cdots.$$

(2) $y''(0)=0,\ y'''(0)=-2,\ y^{(4)}(0)=-2;$

$$y=x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{12}x^4+\cdots.$$

(3) $y''(1)=0,\ y'''(1)=-6,\ y^{(4)}(1)=42;$

$$y=2-(x-1)^3+\frac{7}{4}(x-1)^4+\cdots.$$

3. $y_1(x)=1-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^6}{2\cdot3\cdot5\cdot6}+\cdots,$

$$y_2(x)=x-\frac{x^4}{3\cdot4}+\frac{x^6}{2\cdot3\cdot5\cdot6}+\cdots.$$

习 题 5·4

1.

题　　号	$x=-1$	$x=0$	$x=1$
(1)	常　　点	正则奇点	常　　点
(2)	正则奇点	常　　点	正则奇点
(3)	正则奇点	非正则奇点	正则奇点
(4)	正则奇点	非正则奇点	正则奇点
(5)	正则奇点	常　　点	常　　点

2. (1) $\begin{cases} y_1=x^{\frac{1}{2}}\left[1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!5\cdot9\cdot13\cdots(4n+1)}\right], \\ y_2=\left[1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!3\cdot7\cdot11\cdots(4n-1)}\right]; \end{cases}$

(2) $y_1=J_{\frac{1}{3}}(x),\ \ y_2=J_{-\frac{1}{3}}(x);$

(3) 只有一个广义幂级数解 $y_1=x\left[1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}x^n\right];$

(4) 只有一个广义幂级数解 $y_1=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2};$

习 题 5.5

3. $y=\sqrt{x}\left[C_1 J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)+C_2 J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\right]$.

第 六 章

习 题 6.1

1. (1) 收敛;　　(2) 收敛;　　(3) 发散.

2. (1) $\frac{1}{s^2}$ $(s>0)$;　　(2) $\frac{a}{s^2-a^2}$ $(s>|a|)$;

   (3) $\frac{s}{s^2-a^2}$ $(s>|a|)$;　　(4) $\frac{n!}{s^{n+1}}$ $(s>0)$;

   (5) $\frac{3}{s-7}-\frac{2}{5}\frac{s}{s^2+2}$.

3. (1) $3e^{-t}-2e^{+2t}$;　　(2) $\frac{1}{3}e^{2t}+\frac{2}{3}e^{-t}$;　　(3) $\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}$.

4. $\lim\limits_{s\to+\infty}F(s)=0$.

习 题 6.2

1. (1) $y=\frac{1}{5}(e^{3t}+4e^{-2t})$;　　(2) $y=2e^{-t}-e^{-2t}$;

   (3) $y=\frac{1}{\omega^2-4}[(\omega^2-5)\cos\omega t+\cos 2t]$;

   (4) $y=\frac{1}{5}(e^{-t}-e^t\cos t+7e^t\sin t)$.

3. (1) $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ $(s>a)$;　　(2) $\frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$;　　(3) $\frac{n!}{s^{n+1}}$.

4. (1) $y=(1-t)e^{2t}$;　　(2) $y=\left(t-t^2+\frac{2}{3}t^3\right)e^t$;

   (3) $y=\frac{1}{2}t\sin t+\cos 2t$.

习 题 6.3

1. (1) $\frac{2e^{-2s}}{s^3}$;　　(2) $\frac{e^{-\pi s}}{s^2}-\frac{e^{-2\pi s}}{s^2}(1+\pi s)$;

(3) $\frac{1}{s^2}[(1-s)e^{-2s}-(1+s)e^{-3s}]$.

2. (1) t^3e^{2t}; (2) $\frac{1}{3}u_2(t)[e^{t-2}-e^{-2(t-2)}]$;

(3) $2u_2(t)e^{t-2}\cos(t-2)$; (4) $u_2(t)\sinh 2(t-2)$.

4. (1) $y=1-\cos t+\sin t-u_{\frac{\pi}{2}}(t)[1-\sin t]$;

(2) $y=e^{-t}\sin t+\frac{1}{2}u_\pi(t)[1+e^{-(t-\pi)}\cos t+e^{-(t-\pi)}\sin t]$

$-\frac{1}{2}u_{2\pi}(t)[1-e^{-(t-2\pi)}\cos t-e^{-(t-2\pi)}\sin t]$;

(3) $y=\frac{1}{6}[1-u_{2\pi}(t)](2\sin t-\sin 2t)$.

习　题　6·4

1. (1) $y=e^{-t}\cos t+e^{-t}\sin t-u_\pi(t)e^{-(t-\pi)}\sin t$.

(2) $y=2te^{-t}+u_{2\pi}(t)[1-e^{-(t-2\pi)}-(t-2\pi)e^{-(t-2\pi)}]$.

(3) $y=[1+u_\pi(t)]\sin t$. 2. (3) $y=e^{-t}\sin t$.

第　七　章

习　题　7·2

1. (1) $\lambda_0=0$, $\lambda_n=(n\pi)^2$ $(n=1, 2, \cdots)$;

$y_0=1$, $y_n=\cos(n\pi x)$ $(n=1, 2, \cdots)$.

(2) $\lambda_n=\left[\frac{(2n-1)\pi}{2}\right]^2$, $y_n=\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}x$ $(n=1, 2, \cdots)$.

习　题　7·3

1. (1) 特征值 $\lambda_n(>0)$ 是方程 $\sqrt{\lambda}=-\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda}\pi)$ 的正根; 特征函数为 $y_n=\sin\sqrt{\lambda_n}x$.

(2) 特征值 $\lambda_n(>0)$ 是方程 $(\lambda-1)\sin\sqrt{\lambda}-2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}=0$ 的正根; 特征函数为 $y_n=\sin\sqrt{\lambda_n}x+\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x$.

2*. (a) $y_n=\sin\lambda_n x$; $\sin(\lambda l)\cdot\sinh(\lambda l)=0$; 因此 $\lambda_n^4=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4$.

(b) $y_n=\dfrac{\sin\lambda_n x\cdot\sinh\lambda_n l-\sin\lambda_n l\cdot\sinh\lambda_n x}{\sinh\lambda_n l}$;

$\sin\lambda l\cdot\cosh\lambda l-\cos\lambda l\cdot\sinh\lambda l=0$.

(c) $y_n=[(\sin\lambda_n x-\sinh\lambda_n x)(\cos\lambda_n l+\cosh\lambda_n l)$

$+(\sin\lambda_n l+\sinh\lambda_n l)(\cosh\lambda_n x-\cos\lambda_n x)]/(\cos\lambda_n l+\cosh\lambda_n l)$;

$1+\cosh\lambda l\cdot\cos\lambda l=0$.

第 八 章

习 题 8·1

1. 令 $z=y'$, 则

$$\begin{cases}y'=z,\ z'=-q(x)y-p(x)z+f(x);\\ y(x_0)=a,\ z(x_0)=b.\end{cases}$$

2. $z''-2z=e^x$; $z(0)=0$, $z'(0)=0$, 或者 $y''-2y=2e^x$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

习 题 8·2

1. (1) $x_1=c_1e^{-3t}+c_2e^{2t}$, $x_2=-4c_1e^{-3t}+c_2e^{2t}$;

(2) $x_1=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}+\dfrac{1}{4}e^t$, $x_2=2c_1e^{3t}-2c_2e^{-t}-2e^t$;

(3) $\begin{cases}x_1=-\dfrac{2}{3}\cos t-\dfrac{4}{3}\sin t-\dfrac{2}{3}\sin 2t+\dfrac{2}{3}\cos 2t-5t,\\ x_2=-\dfrac{2}{3}\sin t+\dfrac{1}{3}\sin 2t-2t+1;\end{cases}$

(4) $x_1=c_2e^t$, $x_2=-\sqrt{2}c_1e^{-2t}+c_3e^t$, $x_3=c_1e^{-2t}+\sqrt{2}c_3e^t$;

(5) $\begin{cases}x_1=4c_1e^{-2t}+3c_2e^{-t},\\ x_2=-5c_1e^{-2t}-4c_2e^{-t}+c_3e^{2t},\\ x_3=-7c_1e^{-2t}-2c_2e^{-t}-c_3e^{2t}.\end{cases}$

2. (1) 无解; (2) $x_1(t)$任意, $x_2(t)=\dfrac{1}{4}(e^{2t}-e^{-2t})-x_1(t)$.

习 题 8·4

1. (1) $y_1=c_1e^{-x}+2c_2e^{2x}$, $y_2=2c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$;

(2) $y_1=c_1e^{x}+c_2e^{-x}$, $y_2=c_1e^{x}+3c_2e^{-x}$;

(3) $\begin{cases} y_1=5c_1e^{-x}\cos x+5c_2e^{-x}\sin x, \\ y_2=c_1e^{-x}(2\cos x+\sin x)+c_2e^{-x}(-\cos x+2\sin x); \end{cases}$

(4) $\begin{cases} y_1=c_1e^{x}\cos x+c_2e^{x}\sin x, \\ y_2=c_1e^{x}(\cos x+\sin x)+c_2e^{x}(-\cos x+\sin x); \end{cases}$

(5) $\begin{cases} y_1=2c_1e^{x}+c_2(2x+1)e^{x}, \\ y_2=c_1e^{x}+c_2xe^{x}; \end{cases}$

(6) $\begin{cases} y_1=4c_1e^{-2x}+3c_2e^{-x}, \\ y_2=-5c_1e^{-2x}-4c_2e^{-x}+c_3e^{2x}, \\ y_3=-7c_1e^{-2x}-2c_2e^{-x}-c_3e^{2x}; \end{cases}$

(7) $\begin{cases} y_1=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}+c_3e^{3x}, \\ y_2=-4c_1e^{x}-c_2e^{-2x}+2c_3e^{3x}, \\ y_3=-c_1e^{x}-c_2e^{-2x}+c_3e^{3x}; \end{cases}$

(8) $\begin{cases} y_1=-3c_1e^{-x}+c_3e^{2x}, \\ y_2=4c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+c_3xe^{2x}, \\ y_3=2c_1e^{-x}-c_2e^{2x}+c_3(-x+1)e^{2x}; \end{cases}$

(9) $\begin{cases} y_1=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}, \\ y_2=c_1e^{2x}+c_3e^{-x}, \\ y_3=c_1e^{2x}-c_2e^{-x}-c_3e^{-x}. \end{cases}$

2. (1) $y_1=3c_1+c_2x^{-2}$, $y_2=4c_1+2c_2x^{-2}$;

(2) $\begin{cases} y_1=c_1x^{-1}\cos(\sqrt{2}\log x)+c_2x^{-1}\sin(\sqrt{2}\log x), \\ y_2=\sqrt{2}c_1x^{-1}\sin(\sqrt{2}\log x)-\sqrt{2}c_2x^{-1}\cos(\sqrt{2}\log x). \end{cases}$

习 题 8·5

1. (1) $\begin{cases} y_1=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+\dfrac{1}{2}xe^{x}-\dfrac{1}{4}e^{x}+x, \\ y_2=c_1e^{x}+3c_2e^{-x}+\dfrac{1}{2}xe^{x}-\dfrac{3}{4}e^{x}+2x-1; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1=5(c_1-\sin x)\cos x+5\left(c_2-\log\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|-\cos x\right)\sin x, \\ y_2=(c_1-\sin x)(2\cos x+\sin x)+\left(c_2-\log\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|-\cos x\right) \\ \qquad\times(-\cos x+2\sin x); \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y_1=\dfrac{1}{2}e^{x}+\dfrac{1}{2}e^{-x}+2xe^{x}, \\ y_2=\dfrac{-1}{2}e^{x}+\dfrac{3}{2}e^{-x}+2xe^{x}. \end{cases}$

2. (1) $\begin{cases} y_1=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}+\dfrac{1}{4}e^{x}, \\ y_2=2c_1e^{3x}-2c_2e^{-x}-2e^{x}; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1=5c_1\cos x+5c_2\sin x+\dfrac{2}{3}\sin 2x+\dfrac{2}{3}\cos 2x-5x, \\ y_2=c_1(2\cos x+\sin x)+c_2(-\cos x+2\sin x)+\dfrac{1}{3}\sin 2x-2x+1. \end{cases}$

3. (1) $y_1=-\dfrac{1}{5}e^{-3x}+\dfrac{1}{5}e^{2x}$, $y_2=\dfrac{4}{5}e^{-3x}+\dfrac{1}{5}e^{2x}$;

(2) $\begin{cases} y_1=\dfrac{1}{6}e^{-x}+\dfrac{4}{3}e^{2x}-\dfrac{1}{2}e^{x}+2xe^{x}, \\ y_2=\dfrac{1}{3}e^{-x}+\dfrac{2}{3}e^{2x}-e^{x}+2xe^{x}; \end{cases}$

(3) $y_1=\dfrac{1}{2}-2e^{x}+\dfrac{3}{2}e^{2x}$, $y_2=1-e^{x}$.

第 九 章

习 题 9·1

1. $\dfrac{z-x}{y-x}=c_1$, $(x-y)^2(x+y+z)=c_2$.

2. $\dfrac{zy}{x}=c_1$, $x^2+y^2+z^2=c_2$.

3. $xy=c_1$, $(x+y)(x+y+z)=c_2$.

4. $x=\log(c_1t+c_2)$, $y=\log(c_1t+c_2)+c_3-c_2$, $z=(c_1+1)t+c_2$.

习 题 9·4

1. (1) $z=\Phi\left(y+\dfrac{x^2}{y}\right)$; (2) $z=\Phi\left(y+\dfrac{x}{y}\right)$;

(3) $z=\Phi\left(\dfrac{z-x}{y-x}, (x-y)^2(x+y+z)\right)$;

(4) $h=\Phi\left(a^2-b^2+c^2,\ \frac{bc}{a}\right)$.

3. (1) $z=f\left[\frac{(y^2+x)\pm\sqrt{(y^2+x)^2-4y^2}}{2y}\right]$;

(2) $u=\frac{(z-x)^3(x+y+z)}{2z-y-x}$.

习 题 9.5

2. (1) $\Phi[(x-u)\xi,\ (y-u)\xi,\ (z-u)\xi]=0$，其中 $\xi=\sqrt[4]{x+y+z+u}$;

(2) $u=\frac{1}{2}x^2yz-\frac{1}{6}x^3(bz+cy)+\frac{1}{12}bcx^4+\varphi(y-bx,\ z-cx)$;

(3) $z=\frac{1}{x^3y^3}\varphi\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^3}\right)$.　　3. $f=x^m\cdot e^{\frac{z}{x}}$.

习 题 9.6

1. $z=2x+\frac{3}{2}y^2-2y\sqrt{x-y+\frac{1}{2}y^2}$.　2. $z=\sqrt{xy}$.

3. $(l+m)\sqrt{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}-1}+n(\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}-1)$
$=lx+my+nz$.

参 考 文 献

[1] 叶彦谦：《常微分方程讲义》，人民教育出版社，1979 年。

[2] 中山大学数学力学系常微分方程组编：《常微分方程》，人民教育出版社，1978 年。

[3] 王柔怀和伍卓群：《常微分方程讲义》，人民教育出版社，[illegible]年。

[4] J. J. Stoker：《力学与电学系统中的非线性振动》([illegible]本)。

[5] S. Lefschetz：《微分方程几何理论》(中译本)。

[6] 秦元勋：《微分方程所定义的积分曲线》(上、下册)，上[illegible]术出版社，1959 年。

[7] 叶彦谦：《极限环论》，上海科学技术出版社.

[8] E. A. Coddington and N. Levinson: Theory of Ordinary Differential Equations, 1955.

[9] M. Braun: Differential Equations and Their Applications, 1975.

[10] J. K. Hale: Ordinary Differential Equations, 1969.

[11] B. B. 戈鲁别夫：《微分方程解析理论讲义》(中译本).